2012 年 5 月 17 日 (2012 年 5 月 31 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 5

お知らせ

- 4 月 12 日にお知らせしたように，6 月 14 日に中間試験を実施します．なお，次回 5 月 31 日に**試験の予告**を行いますので，皆様お誘い合わせの上ご出席ください．
- 講義日程を更新，進度を上方修正しました．講義 web ページまたは OCW にてご確認ください．

前回の補足

- **定義・定理・公理について**：定義・定理の意味を説明しましたが，**公理**について複数の方からご質問がありました．前回説明しましたように (1) 数学的概念（言葉）はその意味が明確でなければなりません．その言葉の意味を与える，という機能をもつ文を**定義** (definition) といいます．「3 つの辺の長さが互いに等しい三角形を正三角形という」という文は，「正三角形」という言葉の定義です．(2) 数学的な事実のことを**定理** (theorem) といいます．「正三角形の一つの内角の大きさは 60 度である」というのは正三角形（上であげた定義の意味）の性質を事実として挙げているので定理です．数学では，定理（事実）を事実たらしめている根拠は証明です．すでに知られている事実を元にして論理的に導かれた言明が定理となるわけです．（注：狭い意味では，これらの定理のなかでも重要と主観的に思われるものをとくに「定理」と呼び，それ以外のものを**命題** proposition, ある定理から容易に導ける事実をその定理の**系** corollary, ある定理を証明するための補助的な定理のことを**補題** lemma, 結論が等式であるような事実を**公式** formula などということがあります．これらはすべて広い意味での定理です．）(3) 定理は既知の数学的な事実を用いて論理的に証明されるものですが，それを遡っていくとどこまでも「証明」が必要になってすべての事実に証明をつけることが不可能になってしまいます．そこで，いくつかの命題は成立する，ということを認めてそこから議論を始めるのが通常です．この「予め認める」命題のことを**公理** axiom といいます．どこまで遡るか，何を公理にするかは文脈や空気によってずいぶん違ってきますが，たとえば「実数とは何か」をきちんと定義するのではなく「実数とは次のような性質をもつものである」としていくつかの性質を公理として挙げ，そこを出発点にして議論をすすめるわけです．ここら辺の事情は，エンドユーザーはそれほど気にしなくてよいのですが，この授業では「線形空間」または「ベクトル空間」の定義をする際にすこし触れます．前期の最後か後期です．
- **逆行列について**：正方行列 A に対して $(*)$ $AX = I \Rightarrow XA = I$ (証明は自明ではない) と述べましたが，$YA = I \Rightarrow AY = I$ は成り立つかというご質問を複数いただきました．これは $(*)$ からすぐに導けるのですが，説明が必要ですね．行列の転置と積の関係 (${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$) と I が対称行列であること (${}^tI = I$) を使います：$YA = I \Rightarrow {}^t(YA) = {}^tI \Rightarrow {}^tA\,{}^tY = I \Rightarrow^{(*)} {}^tY\,{}^tA = I \Rightarrow {}^t(AY) = {}^tI \Rightarrow AY = I$.

前回までの訂正

- 前回の講義にて 3 次の逆行列を求める計算をやった際に，p, s, v の連立方程式から p を消去した方程式の未知数が s, v ではなく s, t になっていたそうです．失礼いたしました．
- 講義資料 1, 4 ページ，問題 1-5:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}.$$

【コメント】ご指摘くださった方，ありがとうございました．問題の式では反例がある，ということまで確かめてくださったようです．このようにして「確かめる」ということが皆さんできるようになるとよいと思います（間違っていながら言うんじゃない，というご意見もありましょうが).

授業に関する御意見

■ **講義や講義資料について:**

- 解答配布について．解説ではなく，答えそのものの配布によって，議論するコミュニケーションが減るとは思えません．答えが分かったところで，どのようにその答えに至ったかを友人と議論することになるからです．そして，過程を考えるので「手を動かし頭を使い」「一通りの方法以外も考える」ことになります．また，前回も述べたように，誤った方法を覚えてしまうことが怖いです．質問をすれば良いといいますが，一週間という長い間不燃焼になることも勉強効率を下げます．
  山田のコメント： 4 月 12 日の講義概要に書いてある第 1 の理由はどうですか．関連して，講義資料 4 の 4 ページ一番下にあるコメントは無視？ちなみに「勉強効率」を山田は信用していません．物事を理解するのは効率が悪いことです．
- 結局自分で解かないと（ペンを動かさないと）理解できないことが多いです． **山田のコメント：** そりゃそうです．
- 授業始めの話を聞いて，数学はとりあえず意味を考えずに手を動かそうと思いました．
  山田のコメント： 現実社会や現象とのインターフェイスを考えないで，という意味なら，現段階ではそうするべき．一つ一つの記号の（数学的）意味はきちんと考えて下さい．

■ **ご要望:**

- ときどき字が読めないことがあります． **山田のコメント：** ごめんなさい
- プリントは事前にネットから取ってくるように指示すれば? **山田のコメント：** 講義資料 3, 1 ページ下から 9 行目．
- PDF ファイルがネットにあるので対処はできますが，プリントの現物が足りなくなる事態はできれば避けて頂きたいです．
  山田のコメント： ご迷惑をおかけしております．受講登録者は 111 名，課題提出者 57 名，ということで，実出席者が 100 を超えることがないと判断し，100 部印刷しました．実際の出席者は 80 名くらいだったので，足りないはずはないんですが．それとも無駄を承知で (地球に厳しく?) 受講登録者分を印刷すべきでしょうか．
- マイクを使っていると先生の居場所が分からないことがあります． **山田のコメント：** これを使って，どうやって遊ぼうか．
- おもしろい事をかいたら点数をくれるというブービー賞をつくってほしい．
  山田のコメント： 面白さの評価はめんどくさいので，却下．

■ **授業の感想:**

- 授業の復習が大変です． **山田のコメント：** 予定どおり，よかったです．
- だんだん難しくなると聞いて泣きながらテキストを閉じました． **山田のコメント：** まだまだ閉じないでくださいよ．
- ついていけるか心配． **山田のコメント：** ついてこようとすればよい．
- 定義と定理の違いの説明が良かったです． **山田のコメント：** 本当は知っていなければいけないんですけどね．
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ という事実を使って $\frac{1}{1+0.02} \doteqdot 0.98$ と計算できることに感動しました．これから使わせていただきます．
- ユーロの近似の話はすごくよかったです． **山田のコメント：** 微積分は便利だよね．
- 逆行列を求めるための連立方程式はものすごく解くのが面倒くさいと思いました． **山田のコメント：** そうですね．

■ **言葉:**

- 数学に限らず言葉の扱い方は重要ですね．とくに東工大生にとっては．
  山田のコメント： 人間的に生きるにはきちんと言葉が使えないとね．
- “矛盾” ていう字はほとんど全員が書けると思います．
  山田のコメント： ほとんど全員，というのはそうかと思いますが，毎年，間違える人が複数いるんですよね．
- 質問に対する回答を見ていると，漢字の自信がなくなってきました．
  山田のコメント： 私もそうなんですが. . . 気を付けましょう．
- 突然人が少なくなったように思います． **山田のコメント：** まだそれほどでもないです．
- 眠たくなる暇もない難しくて楽しい授業です． **山田のコメント：** お褒めにあずかりありがとうございます．
- 次も楽しみです． **山田のコメント：** me, too

■ **質問:**

- いろいろあって，大学課程の線形代数の参考書を複数持っていますが，それでも指定の教科書を購入したほうがいいですか．
  山田のコメント： 教科書を指定する理由：(1) 正しい定理や公式が書いてあるものを持っていると便利．黒板に書き間違いがあっても訂正機能が働く．(2) 人や本によって記号や定義が少しずつ違うので，それらをこの授業の間だけは統一できる．(3) 演習問題を利用できる．これらがクリアできるようでしたら， 購入しなくてもよいです．

■ **その他:**

- バラナラバはもっと評価されるべき． **山田のコメント：** そうかなぁ．
- ナラバラナがつぼった． **山田のコメント：** バラナラバです．
- ナラバ (⇒), バラナ (⇐) に一人で笑ってしまった．先生のようなオヤジになりたい． **山田のコメント：** おすすめしません．
- バラナラバにはまりました． **山田のコメント：** はぁ
- 先生のそのユーモラスさは，いったいどこから来るのかとても不思議でしようがありませんよ!
  山田のコメント： 気にしないでください．
- ときどきジョークが全くわからないときがあります． **山田のコメント：** ついてきてくださいよ．
- 杏仁豆腐がおいしいです． **山田のコメント：** そうですか．

質問と回答

■補足

質問： 三次正方行列の計算で $(bd-ae)s+(cd-af)v=d$, $(bg-ah)s+(cg-ai)v=g$ のあと $\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \dots$ の形で表していたところを解説してください.

お答え： 正則な行列 A に対して $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$. 2 次行列の逆行列は高等学校でやった.

質問： $\operatorname{tr}({}^tAA)=0 \Leftrightarrow A=O$ の証明で ${}^tAA$ の ij 成分の議論まではわかりますが，その後の $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ がわかりません.

お答え： n 次正方行列 $C=[c_{ij}]$ の対角成分は c_{ii} $(1 \leqq i \leqq n)$ なので $\operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$.

■$(I+A)^{-1}$

質問： $(I+A)$ の逆行列 $(A^3=\boldsymbol{O})$ について，$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\dots$ から $(I+A)^{-1}=I-A+A^2$ と推測できるのは納得しました．この解き方のおかげで，条件が $A^4=\boldsymbol{O}$, $A^5=\boldsymbol{O}$ など $A^n=\boldsymbol{O}$ の形だった場合，どのような 2 以上の自然数 n でも $(I+A)^{-1}=I-A+A^2-A^3+\dots+(-1)^{n-1}A^{n-1}$ が成り立つことが証明できました.

お答え： そうですね．2 を聞いて n を知る．このテキストでは，零行列は O と書いているようですね.

質問： 正方行列 A において $A^n=O$ のときは「A は正則でない」「$I+A$ は正則」は成り立ちますか?

お答え： 上の質問と回答参照.

質問： $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots$ から $A^3=O$ のとき $I=(I+A)(I-A+A^2)$ $(I+A)^{-1}=I-A+A^2$ が予測される，と講義でいっておられましたが，このような予測が間違っていることはあるのでしょうか．あるなら，反例をおしえてください.

お答え： 「このような予測」が何を指しているのかわかりませんが，講義資料 3, 問題 3-3 などはスカラで成立することが行列では成立しない例.

質問： $A^3=O$ のとき $I+A$ が正則であることを示すのに 1 Euro = 102 円 の話のようなバックグラウドがあるのは先生の様々な問題を解いた経験からですか?

お答え： いくつもの異なる話題から共通にあるものを取り出すというのは日常的な作業ですね.

質問： 結局微分の話は何が言いたかったのでしょうか? 自分は高校時代の逆行列の公式以外に逆行列を求める手段があることを実感するための一例だと捉えていますが，$1+x$ (実数) の逆数と $I+A$ (行列) の逆行列で式のかたちや考え方が似ていたので，何か意味があるのか気になりました.

お答え： 似てるからこのように見当が付けられる，という説明をしたのでした.

■行列の分割

質問： 分割行列の積について，教科書 P14 の A の列の分け方と B の行の分け方を同じになるように分割するとはどういうことなのですか．A, B の成分をまた中に行列があると考えて，列と行を揃えるということですか.

お答え： そういうことです．テキストの例をよく見て下さい．例で納得できれば十分です.

質問： 行列 $A=\begin{bmatrix} B & O_1 \\ O_2 & C \end{bmatrix}$ (B は $m\times m$ 行列，C は $n\times n$ 行列，O_1 は $m\times n$ 行列，O_2 は $n\times m$ 行列) という形で表されるとき $A^n=\begin{bmatrix} B^n & O_1 \\ O_2 & C^n \end{bmatrix}$ であってますか．あっているなら，証明なしで使ってもいいですか.

お答え： 証明できますか? たぶん O_1, O_2 が零行列である，ということを仮定しないとできないと思います.

質問： 行列を小行列に分けても積のルールは適用できるとのことですが，行列を小行列の行列 (?) として見て，それの性質について研究する学問分野はあるのでしょうか?

お答え： 普通に九九のように使うので，分野なぞという立派なものはありません.

■これからやる

質問： ある行列が正則であるかどうかの判定は，n が十分大きいときの n 次正方行列の場合だと現時点では大変なのですが，楽に行える方法はありますか.

お答え： それを後数回でやる．キーワードは階数 rank と行列式 determinant.

質問： 4-2 の B が正則であるための必要十分条件を証明するときに，授業でやったように X の成分を記号でおいて $BX = I$ となるように計算して X を求めて分母が 0 にならない条件から $aei + \dots$ (略) を出すというやり方で合っていますか．もっと計算量が少なくすむ方法はありますか．

お答え： 前半：ok，後半：結局，これに相当することを一般論でやっておく．それがテキスト 37 ページ，定理 2.6，あるいは 61 ページ．

質問： $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると $|A| = ad - bc$ になるとのことですが，A が n 行 n 列の時 $|A|$ を求める公式は何でしょうか．

お答え： テキスト 3 章．

■一般逆行列

質問： 逆行列は正方行列でなくても逆行列のようなものを考えることができるとおっしゃっていましたが，例えばどのようなものですか？

お答え： 「一般逆行列」という語を出したと思います．これが名称です．一般逆行列，一般化逆行列というキーワードでぐぐると，いろいろな解説が見つかります．もちろん，現時点でその解説がわからなくても ok です．

質問： 正方行列でも逆行列 “のようなもの” を考えられるというようなことをおっしゃっていた (ような気がするのですが，誤解でしたらすいみません) と思うのですが，存在するならばなぜ扱わないのでしょうか? それほど重要ではないのでしょうか? それとも難しいからでしょうか．

お答え： 行列に関わることを「全部」1 年生の授業で扱うことなんてとてもできないからです．

■問題

質問： 教科書 p. 19 問 1.26 の問題の解答の際，「2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について A^{-1} が存在しないのならば，ケーリーハミルトンの定理から $A^2 - (a + d)A = \boldsymbol{O}$」と勝手にケーリーハミルトンの定理の名前を出してはいけないのですか? 教科書の解答例には「」の部分を成分計算で証明していたので質問しました．

お答え： 大丈夫です．ついでですが，教科書では零行列は $\boldsymbol{O}$ でなくて O と書いていますね．教科書の解答例は「高等学校の教科書には 2 次行列のケイリー・ハミルトンの定理が明示的にかかれていない（ものがある)」ことへの配慮です．

■証明する必要

質問： 教科書 P18 の 1.17 のような問題を解答するとき，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ は自明のものとして用いていいのでしょうか? やはり証明したほうがいいですか?

お答え： それは「ルール」の問題ではなく「意識」の問題です．もちろんあなたが自明と思うのなら自明として用いて結構です．「自明」という語の意味ですが，ここでは「とても簡単に正しいことがわかる」ということだと思ってください．(数学の文脈では trivial の訳語として使うのガ一般的です．これは「つまらない」という意味ですので，上記のようになります.）したがって，「自明なものとして用いた」場合は，要求されれば簡単に証明をつけることができる，ということを暗にいっていることになります．ひょっとして「試験で減点される」なんていうことを気にしていますか? 問題文の文脈から「証明を要求しているかしていないか」は読み取れるようにしています．（普通のコミュニケーション能力があれば．“普通” の定義によりますね．読み取れることを要求しています.）

質問： 問題を解く際に，定理や公式は証明なしでつかってもいいんですか，.

お答え： 状況による．とりあえず，エンドユーザは証明を知らなくてもよい，という定理はいくつかありますが，それはそのように講義で述べます．

■言葉

質問： 図形には正方形，長方形. . . とありあすが，行列にも正方行列以外の呼び名はあるのでしょうか．(ex. 2×3 みたいな形の名)．それともあまり議論しても面白くない等の理由でそもそも扱わないのでしょうか．

お答え： 後半：“扱わない” の目的語がわからないのですが，正方行列でない行列のことでしたら，よく扱います．前半：正方形でない長方形になにか名前がついていますか? 正方形–長方形の関係は，正方行列–行列の関係と同じではないでしょうか．

質問： ふと思いついたのですが，未知数が 4 つのとき「x, y, z, w」とおくことがあるのはなぜでしょうか．なぜ w を

使うのか，またアルファベット順でなく w を最後に置くのかが謎です．

お答え： そうですね．x から始めてしまったから... ということでしょうね．変化する数を x と書くのは Descartes くらいからかな．すっきり書くには添字記法を使うのがよいでしょう．

■読んでくれ・聞いてくれ

質問： "$AX = XA = I$ となる X は存在するなら唯一つ" となる根拠が分かりません．X が存在するなら唯一つ $\Rightarrow$ $X \equiv A^{-1}$ は分かるのですがその前に何故 2 つ以上存在しないかを教えてください．

お答え： テキスト 12 ページ．授業でもここにある，と言及した．

質問： 複素数を成分に持つ行列を見ていて気になったのですが，複素数を成分にもつベクトル，たとえば $\boldsymbol{v} = (2+i, 3)$ は，平面座標や空間座標を用いて表せますか?

お答え： だから「図形は忘れる」ということを話したはずだが.

質問： 現在考えている行列は $m \times n$, a_{ij} のような型ですが，$l \times m \times n$, a_{ijk} といった型の行列 (?) や $l \times m \times n \times \dots$ などの拡張を考える体系はありますか．あるのなら触りだけでも説明してほしいです．

お答え： 講義資料 4, 5 ページ 21 行目.

質問： 大学受験でよくでてきたケーリーハミルトンの定理は授業では扱われないのですか?

お答え： 講義資料 4, 7 ページ 11 行目以降.

質問： $\Leftarrow$ これはどういういみなんですか?

お答え： $A \Leftarrow B$ は "B ならば A" という意味です．（と説明しましたよね，バラナなんて読みましたが)

■試験

質問： 東工大の中で一般的な数学的学力をもつ学生であれば，講義資料にある問題を理解して解けるようになれば，テストである程度の点数（少なくとも 60 点) はとれるようになりますか．それとは別に自分で問題演習をしたほうがいいですか.

お答え： 実は（そちらからは見えないかもしれませんが，こちら側に立つと）一般的な学生のレヴェルは毎年かなりの幅で動きます．とくに今年度は入学試験の方法が変わったため，まだ「読めない」段階です．したがって，ご質問にはお答えすることができません．そこで中間試験にて顧客調査をするわけです（講義資料 4，6 ページ 21 行目)

質問： 3 次の正方行列の逆行列を求めるような問題はテストに出るんですか.

お答え： 5 次くらいで出すかもしれません．いずれにせよ講義資料 4，6 ページ 21 行目.

質問： 教科書の問題をこれから解いていこうと思うのですが，中間テストや期末テストで出る問題は「教科書の問題の類題」もしくは「教授が授業中に配るプリントの問題の類題」のどちらかによって出されますか，それとも半々ですか?

お答え： 講義資料 4，6 ページ 21 行目.

■え?

質問： 正則行列と正則行列をたすと正則行列になるらしいですが，どう証明しますか.

お答え： なりません．たとえば正則行列 A に対して $B = -A$ も正則です (とくに $B^{-1} = -A^{-1}$)．このとき $A + B = O$ は正則行列ではありません.

■その他

質問： 行列という考え方は誰が始めたのですか? **お答え：**個人ではありません.

質問： 逆行列の証明法がよくわからりませんでした.

お答え： どの命題の証明のどの部分でしょうか.

質問： 先生が計算するために使っているソフトを教えてください.

お答え： Mathematica. 成績の処理などは Perl のスクリプトを書く.

質問： よの中みんな金持ちの証明：10 億円を持ってる人金持ち，1 円少ない人金持ちである．数学的帰納法により，みんな金持ち，どこがおかしいのか.

お答え： 全ての人はハゲである，というのもありますよね.

質問： 前回の授業までは吊りズボンでしたが，今回は普通のズボンになっていて，使い分け方がわからなくなりました．ズボンを運用する上での指針がありましたら教えてください.

お答え： 吊ってましたよ.

5 連立 1 次方程式 (1)

■係数行列と拡大係数行列　未知数 (unknowns) $x_1,\dots,x_n$ に関する**連立 1 次方程式** (a system of linear equations)

$$(*)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

を

$$(**)\qquad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\qquad \left(A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right)$$

と表す．このとき（テキスト 29 ページ),

- (m,n) 型行列 A を $(*)$ の**係数行列** という．
- $(m,n+1)$ 型行列 $(A,\boldsymbol{b})$ を $(*)$ の**拡大係数行列** という．
- $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ のとき $(*)$ は**斉次**または**同次** (homogenious) 連立 1 次方程式という．このとき $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ をこの方程式の**自明な解**という (テキスト 35 ページ).
- $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ のとき $(*)$ は**非斉次**または**非同次** (non-homogenious) 連立 1 次方程式という．

連立方程式 $(**)$ の**解**とは，集合

$$(\star)\qquad \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}\subset\mathbb{R}^n \qquad \text{ただし}\qquad \mathbb{R}^n=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\,\middle|\, x_1,\dots,x_n\right\}$$

のことである．ここで，考えている数の範囲は実数とした．もし，数の範囲を複素数とするなら，$(\star)$ の $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ で置き換えることになる．

連立 1 次方程式を**解く**とは，解 $(\star)$ を “パラメータ表示” することである．

例 5.1. 拡大係数行列が次の形になるような連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

の解は $\{{}^t[2,1,0]\}$ である．このように解がひとつの要素からなるときは,「解は ${}^t[2,1,0]$ である」ということもある．

例 5.2. 拡大係数行列が次の形になるような連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\end{bmatrix}.$$

を考えよう．ただし a は定数である．未知数を x_1, x_2, x_3, x_4 とすると，対応する連立方程式は

$$\begin{cases} x_1+2x_2 & =3\\ x_3 & =2\\ x_4 & =1\\ 0 & =a\end{cases}$$

2012 年 5 月 17 日 (2012 年 5 月 31 日訂正)

となる．

もし，$a \neq 0$ ならば最後の式は成立しない．したがって，方程式を満たす $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ は存在しないので，解は**空集合** (the empty set) である．

一方 $a = 0$ のときは，最後の式はいつでも成り立つから最初の三本だけを考えればよい．とくに x_3, x_4 の値は決まってしまうが x_1, x_2 は第一の条件を満たせば何でも良い．

$$x_1 + 2x_2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 &= 3 - 2t \\ x_2 &= t \end{cases} \qquad (t \text{ はスカラ})$$

と書けるので[*1]，与えられた連立方程式の解は

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3-2t \\ t \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

と書ける．

■階段行列　このテキストでは “階段行列” は厳密な定義がある語である（25 ページ）．

- 階段行列の $\mathbf{0}$ でない行ベクトルの個数を**階数** rank という．テキスト 25 ページ (2) の記号では階数は k である．
- 拡大係数行列が階段行列であるような連立 1 次方程式は容易に解ける：
  - 最後の一列を取り除くと階数が下がる場合は解は空集合である．
  - 最後の一列を取り除いても階数が変わらない場合は，段の部分（テキスト 25 ページ (2) の $q_1, \ldots, q_k$ 列) 以外の部分に対応する未知数を “任意定数” とおけば，解がパラメータ表示できる．

■基本行列と行基本変形　**基本行列** もここでは定義をもった語である (テキスト 22 ページ).

一方，行列に対して次の 3 つの操作を**行基本変形**という（テキスト 24 ページ）:

(R1) ある**行**に 0 でないスカラ c を掛ける．
(R2) ある**行**に別の行にスカラ c を掛けたものを加える．
(R3) 二つの**行**を入れ替える．

事実 5.3.
- 基本行列は正則行列である (テキスト 24 ページ，定理 2.1)
- 行基本変形の各々の操作は，左から基本行列をかけることと一致する．
- 任意の行列は，行基本変形を有限回施すことによって階段行列に変形することができる．（テキスト 25 ページ，定理 2.2）
- テキスト 25 ページ，定理 2.2 で得られる階段行列は，変形のしかたによらず，ただひと通りである．

行列 A から行基本変形によって得られる階段行列を **A の階段行列**という．

系 5.4. 正方行列 A が正則行列であるための必要十分条件は A の階段行列が単位行列となることである．

証明. A の階段行列を B とすると $PA = B$ となる正則行列 P が存在する．A が正則ならば，$B = PA$ は正則だが，正則な階段行列は単位行列しかない（演習問題参照）．逆に $B = I$ ならば，$A = P^{-1}B = P^{-1}$ となり A は正則である[*2]．　□

注意 5.5. 同様に列基本変形（基本行列を右からかける）を考えることもできるが，当面は使わない．

■行基本変形によって階段行列に変形する　与えられた行列に行基本変形を施して階段行列にするのは次のレシピによる（掃き出し法，テキスト 26 ページ）: まず $k = 1$, $l = 1$ として

- 第 k 列に注目し，k の l 行目以下の成分のうち，0 でないものがあれば，そのうち一つに○をつける．もしそうでなければ k を一つ増やして同じことを行う．

[*1] ここの “バラナラバ” は「であるための必要十分条件は」と読む．

[*2] ここで，正則行列 A, B の積 AB が正則であること，正則行列の逆行列は正則であることを用いた（演習問題参照）．

- 上で〇をつけた成分を含む行が l 行目になるように行の入れ替えを行う．
- l 行目に 〇 の成分の逆数をかけて〇の成分が 1 になるようにする．
- 上で l 行目になった行のスカラ倍を加えることにより k 列目の l 行目以外の成分を 0 にする（掃き出し）．
- k を一つ，l を一つ増やして最初のステップにもどる．

この操作で "〇" をつけた成分を掃き出しの**ピヴォット** pivot とよぶ．

■行基本変形と連立 1 次方程式

定理 5.6. 行基本変形は連立 1 次方程式の解を変えない．すなわち，連立 1 次方程式 $(*)$ の拡大係数行列に行基本変形を施して得られる行列に対応する連立 1 次方程式の解は，$(*)$ の解と一致する．

証明. 連立方程式 $(*)$ を $(**)$ のように行列表示すると，拡大係数行列 A' は $A' = [A, \boldsymbol{b}]$ と書ける（行列の分割をしている）．A' に行基本変形を施した行列を $V' = [V, \boldsymbol{w}]$ とすると，行基本変形の性質から，ある m 次正則行列 P で $V' = PA'$ となるものが存在する．とくに

$$[V, \boldsymbol{w}] = V' = PA' = P[A, \boldsymbol{b}] = [PA, P\boldsymbol{b}]$$

であるから，V' に対応する連立 1 次方程式は $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ となる．ここで P は正則だから

$$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; P^{-1}PA\boldsymbol{x} = P^{-1}P\boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,; \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

であるから，

$$\{\boldsymbol{x} \,|\, V\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}\} = \{\boldsymbol{x} \,|\, PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

となり，2 つの方程式の解は一致する． □

■連立 1 次方程式の解法

- 拡大係数行列に行基本変形を行い，階段行列に変形する．
- 階段行列に対応する連立 1 次方程式を解く．

問題

5-1 前回の補足ともう少し：次を確かめなさい．
- 2 つの正則行列 A, B の積 AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$．（ヒント：ただかけてみればよい）
- 正則行列 A の逆行列は正則で $(A^{-1})^{-1} = A$．（ヒント：ただかけてみればよい）
- 正方行列 A の一つの行の成分がすべて 0 なら，A は正則でない．
  (ヒント：逆行列 X が存在したとして X を列ベクトルに分解し $AX = I$ という式をよく見る)．
- 正則な階段行列は単位行列である．

5-2 基本行列（テキスト 22 ページ，$P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij}）の (k, l) 成分を一般的に表す式を作りなさい（ヒント：クロネッカーのデルタ記号を用いる）．

5-3 次の連立 1 次方程式を解きなさい：

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +8x_4 & = & -3 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -4x_4 & = & 5 \\ x_1 & +2x_2 & +\;x_3 & +5x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +15x_4 & = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -2x_2 & +\;x_3 & +5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & -2 \\ x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +9x_4 & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

5-4 テキスト 29 ページ，問 5; 46 ページ 2.1, 2.3, 2.4, 2.5.