2012 年 5 月 24 日 (2012 年 5 月 31 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 6

お知らせ

- 今回は中間試験３週間前でした．前回予告したように今回試験予告をいたしますが，次回もやります．

前回までの訂正

- **問題 5-3:** 最初の連立１次方程式を黒板で解説しましたが，計算に間違いがあったようですので，ここに要点を記しておきます：拡大係数行列に行基本変形を施すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 15 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  なので，与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 & = 1 \\ x_3 + 3x_4 & = -1 \end{cases}$ と同値．したがって，$s = x_2$, $t = x_4$ とおくことにより，与えられた方程式の解は $\left\{ \begin{bmatrix} -2s - 2t + 1 \\ s \\ -3t - 2 \\ t \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$ と表すことができる．
- 講義資料 5, 7 ページ 11 行目：階段行列の 0 でない行 ⇒ $\mathbf{0}$ でない行ベクトル
- 講義資料 5，８ページ定理 5.6 の証明の 1 行目：行列の分割している ⇒ 行列の分割をしている

授業に関する御意見

- 解答を配って欲しいとはそれほど強く思ったことはないけど（もちろん配ってくれれば喜ぶ）解答を配らせる方法を思いついてしまった気が. . . しなくもない． **山田のコメント：** おぉ. . .
- これを出すために金曜の雨の中を抜けてキャンパスまで来ました． **山田のコメント：** ご苦労様です．
- 行基本変形の各操作に対応する基本行列が必ず存在する，という事実が天下り的であるように授業では聞こえたので，授業中に少し触れるとわかりやすかったと思います．（確かにテキストを見れば済む話ではあるのですが）
  山田のコメント： そうですね．ちょっとコメントしましょう．
- I (単位行列) が階段行列で，拡大係数行列の左側ということが分かったので，n 次連立に対して妙なスッキリ感がありました．
  山田のコメント： n 次連立ではなく n 元連立．
- 高校生のときまで使っていた通常の連立方程式の解き方（式変形による解法）と原理はあまり変わらないのに，係数をかかない分，今日の授業で習った解法の方が間違えが少ないと思う．
  山田のコメント： 係数ではなく未知数ですね．係数は全部ならべて書いてます．高等学校で習った解き方と実は全く同じですね．変数の消去の順番を systematic に決めているだけです．
- 軽々しく自明という言葉を使うのはこれから辞めようと思います． **山田のコメント：** それがいいと思います．
- 計算ミスも授業内容の誤りですか? **山田のコメント：** はい．
- 黒板の上に貼り付いた謎の板の目的が知りたいです． **山田のコメント：** 私も知りたい．
- 上の板はいつとれるのでしょうか． **山田のコメント：** 私も知りたい．
- 行列の成分の中に 0 を見つけると心が落ち着きます． **山田のコメント：** そうですか? 掃き出し法みたいな人ですね．
- 数学の用語などを英語とあわせて紹介してくれるのがありがたいです． **山田のコメント：** はい．
- 見出しのおかげで見やすいです． **山田のコメント：** スペースに余裕があればやります．
- 研究で TSUBAME を使ったことはありますか?
  山田のコメント： 自分はそんなに大きな計算をする研究をしていないので，ありません．授業では. . . . OCW は TSUBAME 上で運用されているの知ってました?
- 3 の倍数と 3 がつく数でアホになってください． **山田のコメント：** それ以外でもアホですがなにか?
- ツンデレが好きなのですか? 僕はクーデレの方が好きですが． **山田のコメント：** ツンデレですか，と言われたことがある. . .
- 相変わらずの先生のトークセンスには驚かされるのですが，ご自身で講義を面白くする心がけ等をなさっていますか?
  山田のコメント： いいえ．
- 暑くなってきたので超寒いギャグをお願いします． **山田のコメント：** いいんですか?

質問と回答

■階段行列

質問： 階段行列の説明が少なくて理解しにくいと思いました．

$$\begin{bmatrix} & \underline{\ \ 1} & \underline{\ \ 2} & 0 & 0 \\ & & \Diamond & \underline{\ \ 1} & 0 \\ 0 & & & & \underline{\ \ 1} \end{bmatrix}$$

のような行列がありましたが，(1) どうしてこの形にするのか．(2) どんな行列でもこの形にできるのか．(3) 行に適当な数を掛けて他の行に加えることである行を 1, それ以外の行は 0 となる列をつくることができるのはわかりますが，2 がある列はどうなるのか．◇ に 3 が残っていた場合，1 行目を使ってここを 0 にすることができない．（悩んだあと，これは階段の形が違うだけだと気づきましたが）(4) 今日はとりあえず定義を覚えておけばいいということだったでしょうか．

お答え： (1) 対応する連立方程式が “最も簡単な形” すなわち，“$0=0$” の形でない方程式の個数が最小，それぞれの方程式に含まれる未知数の個数が最小．さらに，方程式は下の方から解くことができる．もうひとつ，この形にまですると一意性がいえる (講義資料 5，事実 5.3 の 3 番目)．(2) 講義資料 5，事実 5.3 の 2 番目（証明は書き表すのが面倒なだけなのでここでは扱わない，と講義で述べました）．(3) その場合は第 1 行で第 2 行を消すのではなく，第 2 行で第 1 行の “2” を消すことができます．(4) いいえ．定義以外のところ（上の回答にて引用したところなど）を見落としていませんか?

質問： $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ これは階段行列に含まれますか? 含まれるのならば階数は 4 で良いのでしょうか．また，行基本変形は連立方程式の変形 (?) を行っているという認識であっているのでしょうか．

お答え： 階数 4 の階段行列．あっています．

■掃き出し法

質問： 連立一次方程式の拡大係数行列について．掃き出し法を適用するときに $n \times m$ 行列 (n, m は十分に大きい) だとかなり時間を要するのではないか，と思うのですが，行列の分割は掃き出し法を使う際に有効でしょうか．（※各ブロックの行列の行と列の条件次第ではかなり楽になるのでは？と考えてみましたが，あまり有効になるような区分けの仕方が見つかりませんでした．）

お答え： 一般的には難しいですね．どこかで（行列式を扱うあたりで）例をあげるかもしれません．

質問： 今回の授業の掃き出し法による変形に用いた行列はいとを感じるような行列でしたが，特に意図のない一般的な行列についてもただ泥臭くなるだけで簡単に解を求められるのでしょうか．

お答え： はい，階段行列に変形ができますから（講義資料 5, 事実 5.3 の第 3 項；テキスト 25 ページ，定理 2.2)．

■言葉・記号

質問： 講義資料 8 ページに連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列は「$[A, \boldsymbol{b}]$ と書ける (行列の分割をしている)」とありますが，行列の分割をしているのであれば，カンマは必要なく $[A\ \boldsymbol{b}]$ と書くべきではないでしょうか? それともこれは特珠（原文ママ，特殊のことか）な書き方なのでしょうか？

お答え： たとえば行ベクトルは，テキスト 2 ページの脚注のように，カンマをつけて成分を区切ること「も」あります．また，テキスト 15 ページ下から 2 行目のように，列ベクトル分解をカンマで区切ること「も」あります．対象をヨコに並べる場合，区切りがわかりにくいようならカンマで区切るという習慣になっているようです．

質問： 係数行列は，定数項の情報を含まず方程式を表現できていないため，使い道が限られそうで，係数行列を考えることにまだ意義が感じられないのですが，これは拡大係数行列の導入をスムースにするためだけに用意された用語なのですか？あるいは他に用途があるのでしょうか？

お答え： (1) とくに $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の形の連立方程式を**同次方程式**あるいは**斉次方程式**と呼び，これは理論のなかで特別な役割を果たします．$\boldsymbol{0}$ の列に行基本変形をほどこしても $\boldsymbol{0}$ のままですので，同次方程式をとくには係数行列を基本変形すればよいことになります．(2) テキスト 32 ページ定理 2.4 の (2) のように解存在するための条件は係数行列と拡大係数行列の階数の関係で表すことができます．

質問： パラメータ表示に使われる実数として s や t が頻繁に使われるのはなぜでしょうか.

お答え： 時間径数として t が使われることが多いからではないでしょうか.

質問： ベクトルを $\boldsymbol{r}$ などとして表すとき（山田注：手書きの太字）ベクトルを表す文字のどの一画を二重線にすれば良いか分からないことがあるのですが，適当な場所を二重線にするとまずいですか?

お答え： 大体，縦方向を二重にするのですが，適当でよいと思います．いろいろな人の習慣を黒板で眺めて下さい.

質問： 係数行列と拡大係数行列の区別が見た目からはできないと思うのですが，どうやって見分けるのですか.

お答え： 係数行列，拡大係数行列という語は行列の属性を表す語ではありません．“方程式 ... の係数行列”，“行列 ... を拡大係数行列にもつ方程式” というように使います.

■問題

質問： 第 5 解の問題 5-1 の「正則な階段行列は単位行列である」ということを証明するには背理法を使い，階段行列 A を $n \times n$ 行列とし，A が単位行列ではないとき，n 行目の成分がすべて 0 であるから，A は正則でない，ということを示すやり方で合っていますか? **お答え：**合っています.

質問： 問題 5-1 の「正方行列 A の一つの行の成分が 0 なら A は正則でない」が証明できません．教えて下さい.

お答え： ヒント (X を列ベクトルに分割し $AX = I$ をよく見る) のどのへんまで考えましたか?

質問： 5-2 に関してですが，一般にとは，例えば $P(c)_i = [\delta_{kl} + \delta_{ki}\delta_{il}(c-1)]$ などと書けば良いのですか.

お答え： 問題 5-2 のことですね．良いのです．左辺は $P_i(c)$ ですね.

質問： プリントの問題 [5.3] を解く上で，授業で行った〇のつける位置がどこだと計算が楽になるのかわかりません．教えてください.

お答え： いままで〇をつけていた行よりも下の 0 でない成分なら原理的にはどれでもよい．どれが楽かは，全部のパターンをやってみればわかると思います.

質問： 行基本変形の際 “=” を使ってはいけないのは，何となく分かります．講義では代わりに “→” を使っていましたが，これはテストの回答等でも使える一般的な表記方法ということですか.

お答え： この授業の文脈ではそうです.

■？

質問： 基本行列を左からかけるというのは， ある行の成分をそれぞれ 0 以外のスカラー倍すると考えてもいいですか?

お答え： よくありません．基本行列の定義（テキスト 22–23 ページを見よ).

質問： 掃き出し法って結局のところ連立方程式と同じことをやってるのでは? どういう点で有利なのでしょうか.

お答え： 「連立方程式と同じこと」とは「中学校や高等学校で習った連立方程式の解き方と同じこと」という意味ですね．同じことをやってます（と講義では説明しましたよね)．有利かどうかは目的によります.

質問： 行基本変形を施すと，未知数を求められるのはわかりますが，もとの行列とは最終的に別モノになってしまうと思うんですが，未知数さえ正しく求められれば行列が別モノになることに何か問題はないのですか.

お答え： 講義資料 5, 定理 5.6.

■その他

質問： 連立 n 次方程式 ($n = 2, 3, 4, \dots$) も行列を使って解けるのでしょうか.

お答え： 例えば 2 元 2 次の連立 1 次方程式の一般型を書いてご覧なさい．行列を使って解けそうに見えますか?

■意味不明

質問： 行基本変形が行ごとに変形しているのは分かるのですが，何か基本なのかサッパリです.

お答え： 0 が増えるとさっぱりしますね．“サッパリです” では何を聞いているのかわかりません.

質問： どのような行列でも階段行列にして連立一次方程式にして解いた方がいいのでしょうか.（ケースバイケースといわれればそれまでですがどのような行列の場合特に有効でしょうか）

お答え： 「行列を解く」というのはどういう動作でしょうか.

質問： 列に対する変換はどんな感じですか? **お答え：**普通の感じです.

質問： 行基本変形できれば中間テスト満点とれますか.

お答え： できれば，という語でどれくらいの範囲をさしているかわかりませんのでお答えできません.

6 連立 1 次方程式 (2)

■行列の階数

定義 6.1. 階段行列の零ベクトルでない行の個数をその階段行列の**階数** rank という．

事実 6.2 (テキスト 定理 2.2, 2.11)**.** 任意の行列は，行基本変形によって階段行列に変形することができ，得られる階段行列は変形のしかたによらず一通りに定まる．

定義 6.3. 行列 A が行基本変形により階段行列 B に変形されるとき B の階数のことを A の**階数** rank といい，$\operatorname{rank} A$ と書く．

例 6.4. 階数が 0 であるような行列は零行列である．実際，階数 0 の階段行列は零行列である．行列 A の階数が 0 なら，A は行基本変形により零行列 O に変形される．行基本変形は，基本行列（正則行列）を左からかけることで得られるから，それらの基本行列の積をまとめて $PA = O$ となるような正則行列 P が存在する．P は正則なので $PA = O$ の両辺に P^{-1} をかければ $A = O$ を得る．

例 6.5. n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = n$ となることである．これを示そう．

(1) $n \times n$ 型の正則な階段行列は I である．実際，$n \times n$ 型の階段行列 B が I でないならば，第 n 行は零ベクトルになる．すると，任意の n 次正方行列 Y に対して BY の第 n 行は零ベクトルになるから $BY = I$ となる Y は存在しない．したがって B は正則でない．（示したいことの**対偶** contraposition を示していることに注意しよう．）

(2) $n \times n$ 行列 A が行基本変形により階段行列 B に変形できたとすると，$PA = B$ となる正則行列 P が存在する．(2a) A が正則ならば，積 PA も正則（テキスト 12 ページ，定理 1.2）だから B は正則．したがって (1) より $B = I$ なので $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$. (2b) $\operatorname{rank} A = n$ ならば (1) より $B = I$．したがって $PA = I$ となる．したがって A は正則で $P = A^{-1}$．（講義資料 5，1 ページ，前回の補足の 2 番目の項目参照）

■逆行列 (1) 例 6.5 で見たように，n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = n$ となることである．このとき，A は行基本変形により単位行列 I に変形される．とくに $PA = I$ となるので P は A の逆行列である．

例 6.6. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を階段行列に変形しよう．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{ 行}) + (-1)(1\text{ 行})$$

2012 年 5 月 24 日 (2012 年 5 月 31 日訂正)

$$
\begin{aligned}
&\to \begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&-2&0\end{bmatrix} && (1\text{ 行})+(-2)(2\text{ 行})\\
&\to \begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&-2&0\end{bmatrix} && (3\text{ 行})+2(2\text{ 行})\\
&\to \begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&6\end{bmatrix} && (3\text{ 行})\times\frac{1}{6}\\
&\to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix} && (1\text{ 行})+5(3\text{ 行})\\
&\to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix} && (2\text{ 行})+(-3)(3\text{ 行})
\end{aligned}
$$

となり単位行列に変形できたので $\operatorname{rank} A=3$ である．ここで変形を表す行列を順番にかけ合わせて

$$
P:=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-2&5\\3&0&-3\\-1&2&1\end{bmatrix}
$$

とおくと $PA=I$ であるから $P=A^{-1}$ である．

■逆行列 (2) 掃き出し法　一般に n 次正方行列 A の逆行列を求めるとは $AX=I$ を満たす行列 X を求めることである．X を列ベクトルに分解すれば，これは 3 組の連立一次方程式であるが，係数行列は共通なので，一度に解くことができる：

> n 次正方行列 A に対して，$n\times 2n$ 行列 $[A,I]$ を行基本変形により階段行列に変形したとき $[I,P]$ の形であれば A は正則で $P=A^{-1}$，そうでなければ A は非正則である．

注意 6.7. 計算機などで逆行列を求めるのはここにあげた掃き出し法を（原理的には）用いるのが普通である．実は逆行列を求める公式（テキスト 定理 3.20）はある．これは理論的には重要だが，計算量が非常に大きいため，具体的に逆行列を求める問題では実用的ではない．

■同次連立方程式　“定数項” がすべて 0 であるような連立一次方程式を**同次** homogenious 連立一次方程式という．同次連立一次方程式

$$
(6.1)\qquad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\qquad\left(A\text{ は }m\times n\text{ 行列},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\boldsymbol{o}\text{は零ベクトル}\right)
$$

を考える．

事実 6.8.
- $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ は (6.1) を満たす．これを**自明な解** the trivial solution という．
- $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ が (6.1) の解[*1]ならば $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ も解である．

[*1] 前回の用語では，(6.1) の解とは，集合 $\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\}$ であるが，その一つ一つの要素を “解” といったりもする．

- $\boldsymbol{x}_1$ が (6.1) の解ならば $\lambda\boldsymbol{x}_1$ (λ はスカラ) も解である.
- $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$,..., $\boldsymbol{x}_k$ が (6.1) の解ならば，スカラ λ_1, ..., λ_k に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k$$

  も解である.
- $\operatorname{rank} A = r$ ならば方程式 (6.1) の解は

$$\{\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ はスカラ}\} \qquad k = n - r$$

  の形に書ける.
- $m = n$ のとき，(6.1) が自明でない解をもつ必要十分条件は A が正則でないことである.

■非同次連立方程式　一般に，連立一次方程式

$$(6.2) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \left(A \text{ は } m \times n \text{ 行列}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right)$$

を考える.

事実 6.9.
- 方程式 (6.2) の解が**空集合** the empty set でないための必要十分条件は, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}]$ となることである．このとき，解は $n - \operatorname{rank} A$ 個のパラメータを用いて表すことができる.
- 方程式 (6.2) の解 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ に対して $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ は同次方程式 (6.1) の解である.
- 方程式 (6.2) の解 $\boldsymbol{x}_0$ をひとつ選ぶ．(6.1) の解が

$$\{\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ はスカラ}\} \qquad k = n - \operatorname{rank} A$$

  の形にかけているならば，(6.2) の解は

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ はスカラ}\}$$

  と表される.

問題

6-1 事実 6.8 を確かめなさい.

6-2 事実 6.9 を確かめなさい.

6-3 テキスト 47–49 ページ, 2.2, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18.

6-4 テキスト 49–50 ページ, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23.