2012 年 5 月 31 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 7

お知らせ

- 今回より試みに提出物の締切を**授業の翌日金曜日の 17 時**としてみます．ご意見をお聞かせ下さい．
- 前回の再放送ですが，6 月 14 日の試験予告をします．

前回までの訂正

- 講義資料 5, 7–8 ページ，行列を階段行列に変形するためのレシピに 1 項目抜けていました．正しくは次の通り：
  - 第 k 列に注目し，k の l 行目以下の成分のうち，0 でないものがあれば，そのうち一つに○をつける．もしそうでなければ k を一つ増やして同じことを行う．
  - 上で○をつけた成分を含む行が l 行目になるように行の入れ替えを行う．
  - l 行目に ○ の成分の逆数をかけて○の成分が 1 になるようにする．
  - 上で l 行目になった行のスカラ倍を加えることにより k 列目の l 行目以外の成分を 0 にする（掃き出し）．
  - k を一つ，l を一つ増やして最初のステップにもどる．
- 講義資料 6, 4 ページ，定義 6.3: 行列 A を ⇒ 行列 A が
- 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}]$ のとき解は無限個ある，といったようです．A が n 次正方行列で，この階数が n のときは，解は一つです．

授業に関する御意見

- 質問用紙の提出をせめて金曜日の 17:00 辺りに移せないでしょうか? 内容の復習時間を十分に取りたいです．これから授業内容も難しくなると思うので... **山田のコメント：** 今年度は問題がなさそうなので，とりあえずやってみます．
- 授業は面白いので，今後も同様にお願いします． **山田のコメント：** 授業「は」？
- 次も楽しみです． **山田のコメント：** 刮目して次回を待て．
- $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$ みたいなもの，もっとほしいです (笑) **山田のコメント：** さがしてごらん．
- 約分は難しいですね． **山田のコメント：** そう．間違いの宝庫．
- $\frac{\sin x}{n} = 6$ の意味がやっと分かりました． **山田のコメント：** おそい?
- だんだん難しくなりますね． **山田のコメント：** はい．難しくなります．
- テスト楽しみです． **山田のコメント：** me, too.
- テストは入試以来受けてなかったので，久しぶりの試験で緊張します． **山田のコメント：** ただの試験なのでお気楽に．
- カンニングペーパーが使える試験なんて斬新です．期末試験でもやるんですか?
  山田のコメント： 結構いろんな人がやってますよ．期末試験もやりますが，用紙は中間試験の返却答案に添付したものを使ってもらうことになります．すなわち中間試験の答案を受け取らないとカンニングペーパーは手に入らない．
- 公認カンペ面白いですね． **山田のコメント：** よくあります．他人が近くにいる時に「カンペ」と大きい声で言わないように．
- 右手を怪我していて，左手では板書がおいつきません． **山田のコメント：** お大事に．手伝ってもらうのもよいかも．
- 講義室が暑いです． **山田のコメント：** そろそろ空調の季節ですね．
- 黒板の上の謎の板が外されるそうで良かったです． **山田のコメント：** ほんとうに．
- 良い質問をできるかって大事だと思います（欲しいです） **山田のコメント：** そう．良い質問が出ると授業がうまくいく．
- 逆行列の求め方のあたりで話についていけなくなりました．**山田のコメント：** そうですか．(以上原文ママ)
  山田のコメント： というわけで，コメントまでつけられてしまいました．どうしよう．
- 中間試験の問題を簡単にしてくれないと謎の板が一生外れなくなる呪いをかけましたのでご検討よろしくお願いします．
  山田のコメント： 呪いがきいたかどうかを確かめる対照群は用意しましたか? ところで「一生」ってだれの?
- コンプガチャについてどう思いますか? **山田のコメント：** 思いません（やったことないし）
- 我が真名は暗黒部族酋長グンマー! 先々週授業を欠席したが闇の力を使用することにより，掃き出し法をマスターした! フハハハハ!!! 次の中間試験（タタカイ），我は勝利する!! **山田のコメント：** 勝ち負けじゃないと思うのですが... グンマーですか．

質問と回答

■連立一次方程式

質問： プリントの中で，事実 6.8 の注釈が，例がないのでなにを言っているかわからないので，具体的な例で説明をお願いします.

お答え： たとえば，2 元の 1 次方程式 $2x+y=0$ の解は，講義資料 5 の言葉に従えば集合 $\left\{\binom{x}{y}\middle|2x+y=0\right\}$，それをパラメータ表示すれば $\left\{\binom{-\frac{1}{2}t}{t}\middle|t\in\mathbb{R}\right\}$ です．たとえば「$\binom{-1}{2}$ は方程式 $2x+y=0$ 解（解集合）の要素」ですが，これを「$\binom{-1}{2}$ は方程式 $2x+y=0$ の解」ということもある，ということです.「$2x+y=0$ の解は $\binom{-1}{2}$」とは言いません.

■基本変形

質問： 「行基本変形」=「基本行列 $\times A$」ですが，「$A\times$ 基本行列」とはならないのはなぜですか.（もはや前回の内容で申し訳ないです）

質問： 本当に基本行列を右からかけてみればすぐわかる.「列の入れ替え」など列にかんする操作—列基本変形という—になります．テキスト 40 ページ.

■逆行列

質問： $[A\ I]\to[I\ B]$ と板書されていましたが，$[A\ I]$ を行基本変形して，$[I\ B]$ の形にして，一番右の列にあたる B が A の逆行列である，ということで正しいのでしょうか．誤りである場合は解説お願いします.

お答え： 正しいです，という解説を授業でしました.「一番右の列」は「一番右の n 列，ただし A は $n\times n$ 行列」ですね.

質問： $n\times n$ の正則行列の逆行列の話があまり分かりませんでしたが，行列 A を I (Rank n の n 次階段行列）に変形する手順を I に施せば A^{-1} が求まるという認識でいいですか.

お答え： 求まります．理由は例 6.6 をよく見なさい.

質問： $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ において $[A\ \boldsymbol{b}]$ は拡大係数行列を表しているなら $[A\ I]$ は何を表していますか?

お答え： A と I を並べた行列です．どういう答えを期待していますか?

質問： $AX=I\Leftrightarrow[A\boldsymbol{x}_1,\dots,A\boldsymbol{x}_n]=[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n]$ これを解くときなぜ $[A\ \boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n]$ を基本変形すればよいのか分かりません.

お答え： $\boldsymbol{x}_1$ を求めるには $[A\ \boldsymbol{e}_1]$ に行基本変形を施して階段行列にすればよい, $\boldsymbol{x}_2$ を求めるには $[A\ \boldsymbol{e}_2]$ に行基本変形を施して階段行列にすればよい,.... 具体例でよいので $[A\ \boldsymbol{e}_1]$, $[A\ \boldsymbol{e}_2]$, $[A\ \boldsymbol{e}_3]$, ... を全部丁寧に階段行列に変形してごらんなさい．最初の n 列の操作は全部同じにできますね．だったら最初から一度にやってしまえばいいんです．ということです.

質問： 逆行列を求め方（原文ママ：逆行列の求め方？）で $A\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{e}_j$ から $[A,\boldsymbol{e}_j]$ を基本変形するのは分かるのですが，$[A\ I]$ に直せる理由がいまいち分かりません.

お答え： いまいち，とはどれくらいわかっているのでしょう.

■問題

質問： 問題 5-2 なのですが，

$$\begin{aligned}\big(P_i(c)\ \text{の}\ (k,l)\ \text{成分}\big)&=[\delta_{kl}+(c-1)\delta_{ki}\delta_{il}]\\\big(P_{ij}(c)\ \text{の}\ (k,l)\ \text{成分}\big)&=[\delta_{kl}+c\cdot\delta_{ki}\delta_{jl}]\\\big(P_{ij}\ \text{の}\ (k,l)\ \text{成分}\big)&=[\delta_{kl}-\delta_{ki}\delta_{li}-\delta_{kj}\delta_{lj}+\delta_{ki}\delta_{lj}+\delta_{kj}\delta_{li}]\end{aligned}$$

という結論に至りました．違っていたら正答をお願いします．これは上手に探すでもあるのでしょうか?

お答え： 正しいようですが，右辺の [ ] は不要ですね．とくに無い思います．クロネッカーの δ 記号の使い方の練習ですね.

質問： 第 6 回の問題 6-1 で，「$m=n$ のとき (6.1) が自明でない解をもつ必要十分条件は A が正則でないことである」を示すために「<u>A が正則でないとき 1 列か 1 行の成分が全て 0</u> であり，(i) 行が 0 のとき $\operatorname{rank}A<n$ であり $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は無数の解をもつ (ii) 列が 0 のとき」と考えたのですが，列の成分が 0 のとき $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明でない

解をもつことが上手に示せません.（下線は山田）また，方針はこれで合っていますか?

お答え： 方針が合っていません．下線の部分が成り立ちません．実際 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は正則ではありませんが，0 となる行も列ももっていません.

質問： 事実 6.9 の 3 や p. 49 の 2.14 は，$A\boldsymbol{x} = 0$ の解を $\boldsymbol{x}'$ としたとき，$A\boldsymbol{x}_0 = B$, $A\boldsymbol{x}' = 0$ より $A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}') = B$ となる，というごく単純な解答であっているでしょうか.（新しい概念が多く登場して混乱しているための確認として）

お答え： 合っていません．ご質問のような解答では「$\boldsymbol{x}_0$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 (解の集合の一つの要素)，$\boldsymbol{x}'$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解 (解の集合の一つの要素)，であるならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解（解の集合の一つの要素）である，ということとしかいっていません．第 5 回講義資料で述べたような意味で「解」を考えることにしているので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解（集合）が問題に挙げられている**集合と一致する**ことを示さなければなりません.（ちなみに，記号の使い方が自己流ですね!)

それではやってみましょう．A を実数を成分とする $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ として

$$X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{o}\} = (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ の解}), \qquad Y := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}\} = (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解})$$

とおこう.「$\boldsymbol{x}_0 \in Y$ をひとつ取るとき，$Y = \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathfrak{X}\}$」を示したい（これができれば事実 6.9 の 3 番目はすぐわかる)．いま $Z = \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathfrak{X}\}$ とおく（これが Y と一致することを示したい)．(1) $\boldsymbol{z} \in Z$ とすると $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in X$) と書ける．このとき，$\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{x}_0 \in Y$ に注意すれば，$A\boldsymbol{z} = A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}$. したがって $\boldsymbol{z} \in Y$．すなわち “$\boldsymbol{z} \in Z$ ならば $\boldsymbol{z} \in Y$ が成り立つので $Z \subset Y$．(2) $\boldsymbol{y} \in Y$ に対して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0$ とすると $\boldsymbol{x}_0 \in Y$ に注意すれば $A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. したがって $\boldsymbol{x} \in X$. すなわち $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in X$) と書けるので $\boldsymbol{y} \in Z$ なので $Y \subset Z$．(3) (1), (2) より $Z \subset Y$, $Y \subset Z$ が成り立つので $Y = Z$ が成り立つ.

質問： 演習問題の 6-4 で，p 50 2.21 (1) の解答についてですが，

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & b & 1 & a \\ b & 1 & a & b \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & b & 1 \\ b & 1 & a \end{bmatrix}$$

となっていますが，例えば $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^tA$ を用いて，（中略）行基本変形をして考えればよいのですか?

お答え： この階数の等式を示すにはどうしたらよいか，ということでしょうか．転置など考えずに行基本変形をすればよい．$ab = 1$ $ab \neq 1$ など，何通りかの場合分けが必要ですが，いずれの場合もこの等式が言えます（階数は 1, 2, 3 いずれの場合も起きえます)．これが示せてしまえば事実 6.9 の 1 番目から結論が得られますね.

■試験

質問： 講義資料では，行基本変形を何度も席の形で示しながら行っていますが，試験でもそのような記述は必要ですか.

お答え： わかっていれば自然に必要かどうかが分かるように出題します.

質問： 逆行列を求めるときの解答は，教科書 P39 例 7 のように書けば大丈夫ですか?

お答え： 単純に逆行列を求める問題は，答えしかみません.

質問： 「生き物は持ち込み禁止」とありましたが，生物と無生物の境目はどこですか? ウィルスは生き物だと思いますか?

お答え： 痛いところをつきましたね.「意図的な持ち込み」は禁止です．感染のおそれがありますから.

質問： 中間試験予告のプリントは OCW よりダウンロードして個人で印刷したものも可能とのことですが，このプリントの用紙サイズに指定はありますか? (たとえば A**0** や巻物など)

質問： 中間試験予告のプリントに「用紙は講義 web ページ, OCW からダウンロードできる．未記入の用紙のコピーをしてもよい」とありますが，用紙のサイズを指示していないということは用紙のサイズは自由なんですよね?

お答え： A0 の 0 って太字だったっけ．提出物のサイズは守ってくれ，ということをずっと言っておりますので，今回もサイズを守ってください.

質問： 試験予告の神に書いたことは評価に関係しますか? **お答え：**いいえ.

質問： 中間試験の成績は，全体の成績のどれくらいの割合になりますか **お答え：**4 月 12 日配布の講義概要 2 ページ.

■ことば

質問： 「rank」って何ですか? 何のために示していますか?

お答え： 階数，ランク．階段行列の rank, 一般の行列の rank の定義はわかっていますか? その上での質問かどうかによって答え方が変わります．使い方の一部（何のために？の回答）は講義資料 6 の 6 ページにある．

質問： 世間一般に“アスタリスク”のマークは“$\ast$”だと思いますが，先生は“※”と書きますよね．これにはなにか理由があるのでしょうか? 社会に対するわずかな抵抗ですか?

お答え： そうですね．Wikipedia さんによると，$\ast$が多数派のようですが，90 度回転させたものも使われないわけではないようです．この授業では，これらの 2 つは区別していません．

■ちょっとちがう

質問： (A: n 次正方行列) $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$ の解は $\emptyset$ と説明がありましたが，最終的に $\operatorname{rank} A < n$ は A が正則でないことの必要十分条件といって良いのでしょうか.

お答え： 前半と後半の関係がよくわからない．「最終的」以下は正しい．実際，これは「A が正則である $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n$」と論理的に全く同じことをいっています．前半は説明と少し違います．$A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$ の解が $\emptyset$ か 1 つ以上の任意定数を含む.

■読んで/聞いてくれ

質問： 教科書 p 71 クラメールの公式の証明と使い方がよく分かりません.

お答え： これは後でやる（といいませんでしたっけ）

質問： 授業では $AP = I$ となる P を求めると $PA = I$ が成り立つので,「$AP = I \Rightarrow PA = I$」が証明されるということでしたが，この逆「$PA = I \Rightarrow AP = I$」は証明されていなかったように思います．授業と同様の方法でこれを証明することは可能でしょうか?

お答え： 講義資料 5, 1 ページ

質問： 2×2 正方行列の $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ のような逆行列を求める公式は 3×3 以上の行列にもあるんですか?

お答え： ある（テキスト 70 ページ，定理 3.20）と講義で述べた．3 次の場合は演習問題 4-2.

■参考書

質問： 何か良い線形代数の演習用の参考書を教えてください.

お答え： 問題の量などを考えれば，使用中のテキストがよいと思います．その上で何か，ということでしたら，書店（東工大生協でも ok）や図書館で 10 冊くらいを比べて自分に合いそうなものを探す.

■授業

質問： 今後も教科書の順番に授業は進むのでしょうか.

お答え： 概ねそう．すこしいじるかもしれません.

質問： 突如黒板に書きだした $\frac{\sin x}{n} = 6$, $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$, $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$ 等のジョークはどんな動機からですか？

お答え： 一時の気の迷い.

■その他

質問： 逆行列がアツいですね. **お答え：**教室も

質問： これからの季節，鍋をするときの注意事項はありますか?

お答え： ありません．自己責任でお願いします.

7 行列式 (1)

■順列 正の整数 n に対して

- 長さ n の**順列** permutation とは，正の整数 $\{1,\dots,n\}$ をひとつずつ並べたものである．たとえば
$$(1), \qquad (2,1), \qquad (1,2,3), \qquad ,(1,4,3,2)$$
はそれぞれ長さ 1, 2, 3, 4 の順列である．一方 $(1,2,4,2)$ は順列ではない．
- 長さ n の順列は $n!$ 種類ある．
- 長さ n の順列 $(p_1,\dots,p_n)$ に対して
$$\{(i,j)\,|\,1 \leqq i < j \leqq n, p_i > p_j\}$$
の要素の個数を，この順列の**転倒数**という．例えば
$$(1,2,3,4) \qquad (1,3,4,2)$$
の転倒数はそれぞれ 0, 2 である．
- 順列 $(p_1,\dots,p_n)$ の転倒数が r のとき，
$$\varepsilon(p_1,\dots,p_n) := (-1)^r$$
をその順列の**符号** という．

定義 7.1 (行列式 (テキスト 53 ページ))**.** 正方行列 $A = [a_{ij}]_{1\leqq i,j\leqq n}$ に対して，スカラ

$$\sum_{(p_1,\dots,p_n)} \varepsilon(p_1,\dots,p_n) a_{1p_1}\dots a_{np_n} \tag{7.1}$$

を A の**行列式** determinant といって

$$\det A, \qquad |A|, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

などと書く．ただし (7.1) の右辺の和は，長さ n の順列全てについてとる[*1]．

例 7.2.
- 1 次正方行列 $A = [a_{11}]$ に対して $\det A = a_{11}$.
- 2 次正方行列 $A = [a_{ij}]_{1\leqq i,j\leqq 2}$ に対して $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- 3 次正方行列の行列式は，問題 4-2 の公式の分母．（テキスト 39 ページ，例 7）

2012 年 5 月 31 日

[*1] 本によっては「順列」の代わりに「置換」という語を用いて行列式を定義しているが，本質的には同じものである．

■行列式の性質

- 上三角行列の行列式は対角成分の積（テキスト 58 ページ，例 12）
- $\det {}^t\!A = \det A$ (テキスト 53 ページ，補題 3.10；次回以降)
- 正方行列を列ベクトルに分解して $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ ($\boldsymbol{a}_j$ はそれぞれ m 次列ベクトル) のように表すとき，

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = c\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$$
$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m).$$

  (テキスト 63 ページ，定理 3.12).
- 上と同様のことが，行ベクトルに分解した場合にも言える（テキスト 55 ページ，定理 3.2).
- 列（行）を入れ替えると行列式の符号は変わる（定理 3.3, 3.13）
- ある列（行）に別の列（行）のスカラ倍を加えても行列式の値は変わらない (定理 3.5, 3.12).
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ (定理 3.8; 次回もう一度)

以上のことから

定理 7.3. 正方行列 A が正則であるための必要十分条件は，$\det A \neq 0$ となることである．

問題

7-1 テキスト 75 ページ，3.1, 3.2, 3.3, 3.4

7-2 テキスト 75–76 ページ，3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11.

7-3
- n 次の行列式の定義式の中に含まれる乗算は $(n-1) \times n!$ 個である．
- 1 秒間に 10^{15} 回の乗算ができる (10^3 TFLOPS) 計算機で，上の回数の計算を行うと，どれくらい時間がかかるか，$n = 10$, $n = 20$, $n = 100$ の場合に計算しなさい．ただし

$$10! \doteqdot 3.63 \times 10^6, \qquad 20! \doteqdot 2.43 \times 10^{18}, \qquad 100! \doteqdot 9.33 \times 10^{157}.$$