2012 年 6 月 14 日 (6 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 6 月 21 日の授業の際に返却いたします.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 6 月 21 日の授業終了後に申し出て頂くか, 6 月 28 日の授業開始前までに山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{7}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい. [35 点]

連立方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = a \end{cases}$$

を考える. ただし a は実数の定数である. この方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$) の形に表すと, 係数行列 A は $\boxed{1}$, 拡大係数行列は $\boxed{2}$ である. とくに, 係数行列 A の型は $\boxed{3}$ である.
方程式 $(*)$ が解をもつ, すなわち解が空集合でないための条件は $\boxed{4}$ であり, そのとき拡大係数行列 $\boxed{2}$ の階数は $\boxed{5}$ である. したがって, 方程式 $(*)$ の解, すなわち集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ は $\boxed{6}$ 個のパラメータを用いて $\boxed{7}$ と表される.

問題 B 次を求めなさい [25 点]

(1) $A = [-5]$ のとき $\det A$.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ のとき A^{-1}.

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ のとき $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I$.

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき, $\det A$.

(5) $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3]$, $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1, y_2, y_3]$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ と定める.
$\boldsymbol{a} = {}^t[1, 1, -1]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[0, 2, -1]$ に対して $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ すべて.

裏面につづく

問題 C 次の (1) ～ (7) は正しいか．正しければ○，そうでなければ×を解答欄の [　] 内に記し，その理由を述べなさい． [35 点]
なお，次の記号・用語を用いる：

複素数を成分とする正方行列 $A = [a_{ij}]_{1 \leqq i,j \leqq n}$ に対して，その各成分の共役複素数をとった行列を $\overline{A} := [\overline{a_{ij}}]_{1 \leqq i,j \leqq n}$ と書く．さらに $A^* = {}^t\overline{A}$ を A の**随伴行列**という．
複素数を成分にもつ正方行列 A が**ユニタリ行列**であるとは，$A^*A = I$ を満たすことである．

(1) 一般に m 次正方行列 A, B に対して $AB = BA$.

(2) m 次正方行列 A が $A^2 - 3A + 2I = O$ を満たしているならば，$A = I$ または $A = 2I$.

(3) 正則な行列 A と，正方行列 B が $AB = O$ を満たしているならば，B は零行列である．

(4) m 次正方行列 A が $A^4 = O$ を満たしているならば, $I - A - A^2$ は正則である．

(5) 一般に m 次正方行列 A, B に対して $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(6) 複素数を成分にもつ正方行列 A に対して $\mathrm{tr}(A^*A)$ は負でない実数である．

(7) ユニタリ行列の行列式の値は 1 または -1 である．

問題 D [5 点] この科目の講義・教材・問題などに関しての意見・感想・希望・誹謗・中傷などをお書きください.（内容は採点の対象にしません．正しい文章で，意味が通じるように書かれているものには得点を与えます.）

おつかれさまでした ♡

2012 年 6 月 14 日 (6 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：各 5 点

1

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

3

4×5 型

4

$a = \frac{1}{2}$

5

3

6

2

7

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

計算スペース (採点の対象にしません)

- 5, 6 は前後の関係で得点を与えたり与えなかったりしています．ポイントは「拡大係数行列の階数と，解を表示するパラメータの個数の関係」
- 7: この文脈でパラメータに a を用いるのは，さすがにまずいと思います．不正解にしています．
- 7: 解の表現の方法は何通りもあります．2 つのパラメータを含む部分が「同次方程式」の一般解を表していて，残りが与えられた方程式の一つの解（特解）である，ということを使えば容易に検算ができます．

学籍番号	氏　名

2012 年 6 月 14 日 (6 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：各 5 点

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
-5	$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 11 & -7 \\ 3 & -8 & 7 \\ 6 & -9 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & -9 & 20 \end{bmatrix}$	160	$t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- △印が付いているのは「単純な計算ミスが少し」と判断できるもの．50% の得点を与え，5 点単位に丸める．ただし，満点は与えない：(1) ○3つ，△1つは 20 点，(2) ○4つ，△1つは 20 点.
- 1: 行列式は絶対値ではありません (1 名くらい)
- 2: 逆行列を求めたら検算しましょう．単純に行列をかければよいだけ.
- 3: 2 次行列に対しては $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = O$ が成り立つが，3 次以上の行列では一般に O になりません（数名）.「ケイリー・ハミルトンの定理」に関する質問が出た際に，テキストを引用して説明しています.
- 4: -208 と答えた方は，行列式の定義・計算法を**大きく間違って**覚えています.
- 5: $\langle\ ,\ \rangle$ が通常の内積なら $c\,{}^t[1, 1, 2]$ が正解だが，この問題の設定は違っている（実は 3 次元時空の Lorentz-Minkowski 内積というやつ）.

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄

(1) [×]

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(2) [×]

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば，$A^2 - 3A + 2I = O$ を満たす.

(3) [○]

A は正則であるから，A^{-1} が存在する．そこで $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると $A^{-1}(AB) = A^{-1}O$．行列の積の結合法則を用いて $(A^{-1}A)B = O$ だから $IB = O$．したがって $B = O$.

(4) [○]

$X = I + A + 2A^2 + 3A^3$ とすると，

$$\begin{aligned}(I - A - A^2)X &= I + A + 2A^2 + 3A^3 - A - A^2 - 2A^3 - 3A^4 - A^2 - A^3 - 2A^4 - 3A^5 \\ &= I - 5A^4 - 3A^5 = I.\end{aligned}$$

したがって $X = (I - A - A^2)^{-1}$

計算スペース (採点の対象にしません)

- 1: 一般の行列で計算して $\sum_l a_{il}b_{lk} \neq \sum_l b_{il}a_{lk}$ だから，というのは理由にならない．実際 $\neq$ が常に成り立つわけではない（対角行列同士は可換）．“$\neq$ となる場合がある” ことを説明する必要があります.
- 2: 「非自明な零因子が存在」だけでは理由にならなりません．$PQ = O$ となる P, Q を具体的にあげている方もいらっしゃいましたが，その例に対して $A - I = P$, $A - 2I = Q$ となる A が存在しなければ×の理由になっていません.

学籍番号	氏　名

2012 年 6 月 14 日 (6 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 4〕

問題 C の解答欄 (つづき)

(5) [×]

$m=2$ として $A=I$, $B=-I$ とすると $A+B=O$ なので $\det(A+B)=0$.
一方 $\det A=1$, $\det B=(-1)^2=1$ なので $\det A+\det B=2$.

(6) [○]

$A=[a_{ij}]$ とし， A^* の (i,j) 成分を b_{ij} と書くと，$b_{ij}=\overline{a_{ji}}$. したがって A^*A の第 (i,j) 成分 c_{ij} は $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{m}\overline{a_{ki}}a_{kj}$.
とくに $\operatorname{tr}(A^*A)=\sum_{i=1}^{m} c_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\overline{a_{ki}}a_{ki}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|a_{ki}|^2$.
複素数の絶対値は負でない実数だから，結論が得られる．

(7) [×]

$[i]$ は 1 次のユニタリ行列だが $\det[i]=i\neq\pm1$.

計算スペース (採点の対象にしません)

- 5: 「正しいとは限らない」といっているだけではだめ．正しくない例をきちんと挙げて下さい．
- 6: $\operatorname{tr}(AB)$ と $(\operatorname{tr}A)(\operatorname{tr}B)$ は一般に等しくありません．A, B に単位行列を入れてみればすぐにわかりますね．等式 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ は成り立ちます．
- 7: 考えている行列の成分は一般に複素数であることに注意．$\det A^*=\det {}^t\overline{A}=\det\overline{A}=\overline{(\det A)}$ であるから，$\det A$ の絶対値は 1．したがって「$\det A=e^{i\theta}$ の形にかける」．**オイラーの公式**です.「試験にオイラーの公式がでていない」と文句をたれた方，出てますよ．
- 【題意】という語を使っていらっしゃる方が数名．山田はこの語の（数学の文脈での）正確な意味を知りません．広辞苑を引くと「題の意味するところ」とあります．この「題」は「タイトル」のことだと思いますので，我々の文脈にはあてはまらないでしょう．意味をご存知の方は教えて下さい．

学籍番号	氏　名

2012 年 6 月 14 日 (6 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 C への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D [5 点] この科目の講義・教材・問題などに関しての意見・感想・希望・誹謗・中傷などをお書きください．(内容は採点の対象にしません．正しい文章で，意味が通じるように書かれているものには得点を与えます．)

回答欄

正しい文章ということですので，誤字は減点の対象となります．とくに**講義**, **成績** は授業や質問用紙にて再三言及していますので誤字を書いた方には得点を与えていません．

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表に従って着席してください．**座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**.

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- 解答用紙 5 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2, 解答用紙 3, 解答用紙 4, 解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名