2012 年 7 月 19 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 13

お知らせ

- 線形代数学第一の講義は今回で終了です．ご聴講ありがとうございました．8 月 2 日にお目にかかりましょう．
- 恒例の (?) 授業評価アンケートを行っています．授業科目コード：**1108**，区分番号は記入しないでください．記入された用紙は，**11 時までに** ＿＿＿＿＿ さんまでお持ちください．なお，このアンケートの結果はできるだけ早く講義 web ページに公開します．その際，山田のコメントもつけます．
- 定期試験の予告は，中間試験の返却答案に添付しています．お忘れなきよう．
- 来週，7 月 26 日は，山田不在のため，演習担当の皆川龍博先生に授業をお願いしています．演習の補足・質問の受付としていただく予定です．

前回の補足

- $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が部分空間であるための条件 (1) $\boldsymbol{o} \in W$, (2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$, (3) $\boldsymbol{a} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ ならば $k\boldsymbol{a} \in W$，の (1) を (1') $W \neq \emptyset$ に置き換えたとき，(1), (2), (3) と (1'), (2), (3) は同値である，ということを説明しました．
  とくに，“(1'), (2), (3) ならば (1), (2), (3)” を示すさいに $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}$ を用いましたが，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ で良いのではないか，というご指摘を複数いただきました．もちろん ok です．

前回までの訂正

- 講義資料 12，6 ページの上の方のロジックがむちゃくちゃでした．1 行目から 5 行目までを次のように訂正してください：
  いま $\boldsymbol{b} \in W$ で $U := \{t\boldsymbol{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ の要素でないものが存在したとする．すると，部分空間の定義から
  $$\{t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b} \,|\, s,t \in \mathbb{R}\} \subset W$$
  であることがわかる．ここで，$(t,s) \neq (0,0)$ となる s,t に対して $t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{b} \in U$ となってしまい $\boldsymbol{b} \notin U$ に反するので $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次独立でなければならない．
- 講義資料 12, 8 ページ，問題 12-1 (4): $x^3 \Rightarrow x_3$.
- 講義資料 12, 8 ページ，問題 12-6 3 行目：$W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cup W_2$.

授業に関する御意見

- 暑い．暑すぎる．寒いギャグが足りない．足りなすぎる． **山田のコメント：** 善処します．
- 節電警報はまだならないのですか? **山田のコメント：** なりませんねぇ．梅雨があけたのでそろそろでしょうか．
- 今日の授業はわかった． **山田のコメント：** よかった．
- この質問用紙で遠慮なく先生に質問が聞けますね．非常によかったと思います．
  山田のコメント： 後期もやります．ご活用ください．

- とてもいいと思います. **山田のコメント：** そう?
- 夏休みでバカになりそうで怖いです. **山田のコメント：** ほっとくとなりますよ.
- 遅刻癖がついてきてつらい. **山田のコメント：** ご勝手に.
- 最近眠れなくて幸い（原文ママ）のですが. **山田のコメント：** さいわいなんですか?
- 次回で最後ですか. 非常に寂しいですね. 1週間の楽しみな講議のうちの1つだったので. 後期も楽しみにしてます. **山田のコメント：** だから「講義」だっていってるのに！
- ひぎぃ！こんなに（頭に）入らないよぉ！ **山田のコメント：** 怖がらなくても大丈夫です.
- ＼（’ω’）／ウオオオオアアアアーーーーッッッッ！！！！ **山田のコメント：** わざとタイプしにくいものを書いてますよね. そうですよね.
- ┌(＾o＾┐)┐ ホモォ **山田のコメント：** そうですか :-P
- もし肖像権が侵害されたらどうしますか? 訴えますか? **山田のコメント：** ケースによります.
- ORANGINA はおいしいですよね. **山田のコメント：** Richard Gere の CM がいいですね.

質問と回答

質問： $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ とプリントには書かれているのですが，僕には r でなくて n ではないのかと思ってしまいます．まちがっていますか?

お答え： 間違っています．授業では $\mathbb{R}^4$ の 3 つのベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ などを扱っていますよね．ちなみに，プリントには a_1 とは書いてありません．$\boldsymbol{a}_1$ です．

質問： 前回の質問の続きですが，1 次独立を数式以外の言葉で説明することはできないでしょうか? けっこう調べたのですが，“1 次従属でない” または “$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ を満たす $(c_1, \ldots, c_r)$ は $(c_1, \ldots, c_r) = (0, \ldots, 0)$ に限る” という表現しか見当たらないです.

お答え： 教科書には「非自明な 1 次関係を持たない」と書いてありますが.

質問： 教科書 p 63 ページの「$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とするとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合全体からなる集合 $W = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}\}$ は R^n の部分空間となる」の証明の最後の文「右辺は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合であるから，$k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y} \in W$ である」がなぜこう言えるのかがわかりません．教えてください.

お答え： 「$\boldsymbol{x}$ が集合 W の要素である」とはどういうことでしょうか．これがキチンとかければおしまい．(1) “W は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合全体からなる集合” なのだから $\boldsymbol{x} \in W$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合で表されること．(2) $W = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}\}$ なのだから $\boldsymbol{x} \in W$ であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r$ を満たすスカラ $x_1, \ldots x_r$ が存在すること．どちらの条件からでも最後の文はすぐにわかるはず.

教訓：集合がなんだかわからなかったら，対象 x がその集合の要素であるための必要十分条件を書き下しなさい.

ちなみに “P63 ページ” は “86 ページ” または “p. 86” と書くべきです．(a) ページが違う (これは読む人間にストレスを与えます) (b) “p” は “page” の略だから “p 63 ページ” ではページを 2 回いっていることになり，言い回しがおかしい．ついでに言えば R^n でなく $\mathbb{R}^n$.

質問： 解空間と普通の解はどう違いますか?

お答え： この講義では “方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解とは，集合 $\{\boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$，すなわち $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を満たす全ての $\boldsymbol{x}$ の集まり，と定義しました．テキストではそれを方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間とよんでいます．すなわち同じ意味です．しかし，場合によっては解空間の要素を “解” とよぶこともあります．そういう文脈では，解空間は “解全体の集合” です.

質問： 12-5 で $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W_1, W_2 の共通部分は部分空間である，とありますが，$n = 2$ のとき，原点を通る 2 本の直線の交わりは $(0, 0)$ なので $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ ゆえに $\mathbb{R}^2$ の部分空間．$n = 3$ のとき (略) と，$n = 2, 3$ のときは言葉で表現できるのですが，数式を使い証明するにはどうしたらよいのでしょうか.

お答え： 部分空間が原点を通る直線や平面である，などという**高級なことは使いません**．純粋に定義だけを用います.

準備：集合 W_1, W_2 に対して，$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ となるための必要十分条件は $\boldsymbol{x} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{x} \in W_2$ が成り立つことである.

これを用いて，以下 $W_1 \cap W_2$ が部分空間であることを証明しましょう．仮定から W_1, W_2 は $\mathbb{R}^n$ の部分空間だから $j = 1, 2$ に対して

$$(*) \quad \boldsymbol{o} \in W_j, \qquad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W_j \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W_j; \qquad \boldsymbol{a} \in W_j, k \in \mathbb{R} \quad \text{ならば} \quad k\boldsymbol{a} \in W_j$$

が成り立つ．
まず $(*)$ の第一式から $\boldsymbol{o} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{o} \in W_2$ だから $\boldsymbol{o} \in W_1 \cap W_2$．
つぎに $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W_1 \cap W_2$ とすると，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W_1$ であるから $(*)$ の第二式より $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W_1$．同様に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W_2$ であるから $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W_2$．したがって $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W_1 \cap W_2$．
最後に $\boldsymbol{a} \in W_1 \cap W_2$, $k \in \mathbb{R}$ とすると，$\boldsymbol{a} \in W_1$ であるから $(*)$ の第三式より $k\boldsymbol{a} \in W_1$．同様に $\boldsymbol{a} \in W_2$ であるから $k\boldsymbol{a} \in W_2$．したがって $k\boldsymbol{a} \in W_1 \cap W_2$．
どうですか? あなたが考えたものよりずっと単純でしょう．

質問： 12-6 について, W_1 と W_2 の共通部分は一方のスカラ倍が他方のスカラ倍に等しくなるので $k\boldsymbol{a}_1 = l\boldsymbol{a}_2$ (1)．ここで, $W_1 \cap W_2 = W_1 + W_2$ となるのは, $m(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2) = k\boldsymbol{a}_1 = l\boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow (m-k)\boldsymbol{a}_1 + m\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{o}$, $m\boldsymbol{a}_1 + (m-l)\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{o}$, よって $m = k = l = 0$ で $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \emptyset$ となりましたがどうでしょうか?

お答え： どうでしょうか? って**全然違っています**．まず，“W_1 と W_2 の共通部分は一方のスカラ倍が他方のスカラ倍に等しくなるので” の部分が何をいっているか分かりません．集合の共通部分については前の質問の回答参照．結論の $\boldsymbol{a}_1 = \emptyset$ ですが，左辺はベクトル，右辺は集合で，全然違った種類のものを比較しているのでナンセンスです．

質問： 12-6 は等号成立は $W_1 = W_2$ の時ですか．

お答え： そうです．問題を少しいじって $W_1 \cap W_2$ にしてしまいました（本日の訂正欄参照）．このときは $W_1 \cap W_2 = W_1 + W_2$ となるための必要十分条件は “$W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$” です．余裕があったら考えてください．

質問： 問題 12-7 は単純に

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [s_1, s_2, s_3] = \boldsymbol{o} \;\middle|\; s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

でよろしいのでしょうか．

お答え： 全然単純じゃありませんしよろしくありません．ここに書かれている集合は $\mathbb{R}^4$ の部分集合なんですか? たとえばこの集合の要素を 3 つくらい挙げてもらえますか? それから，この集合の定義式にある行列の掛け算はできない (型が合わない) と思うのですが，どうやるのですか?
いずれにせよこの問題はそれほど自明ではないので，余裕のある人への課題とします．

質問： 物理の時間に

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{ただし } \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

といったことが黒板に書かれていたのですが，変ではないですか?

お答え： 変ですよね．$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を外積の定義式の右辺に代入すると “変なもの” になってしまいますよね．もはや行列ではない．この右辺は，記号的に，第一行で展開した

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

のことを略記しているものだと思ってください．これを本当に行列式とみなしたければ “四元数” なんかを持ってくればいいのでしょうが， 現段階ではそこまで考える必要はないと思います．

質問： 授業で $\mathbb{R}^n \supset \emptyset$ を示すときに使われたような，仮定が成立しないなら結論はいつでも正しい，というのは約束事ですか? それとも導けることですか?

お答え： とりあえず約束事と思っていてください．

質問： $\subsetneqq \leftarrow$ この記号は大学数学以降は使わないのですか? さびしいです．（というか $\subset \leftarrow$ これだけで等号成立って何か違和感ある）

お答え： $\subseteq$ は殆ど使われていないみたいです．違和感はじきに慣れます．

質問： $R^n \supset w$ が R^n の部分空間であるとは (1) $0 \in w$, (2) $a, b \in W \Rightarrow a+b \in W$, (3) $a \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow ka \in W$ の後の (1)’ (3)” の条件がよく分からなかったので，教えていただたらと思います．

お答え： (3)” は現れていません．(1’), (2), (3) の組に引用符をつけたものかと思います．内容に関しては「前回の補足」参照．ところで太字はあまり使わない主義?

質問： (1’), (2), (3) $\Rightarrow$ (1) ですが，(3) の $k\vec{a} \in W$ で $k = 0$ として $\vec{0} \in W$ としたら駄目です．

お答え： 本日の補足参照．ただし，この科目では $\vec{0}$ などの記号は用いていないので，駄目です．

13 部分空間の基底と次元

テキスト 4.4 節はかなり盛りだくさんだが，今回は時間の都合で部分空間の「次元」を「基底」という概念を用いて定義する，というところまでにしておこう．

■復習 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ に対して

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が**一次独立**であるとは，「$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ ならば $(c_1, \ldots, c_r) = (0, \ldots, 0)$」が成り立つことである．
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が**生成する** $\mathbb{R}^n$ の部分空間とは $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle := \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r \mid c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}\}$ のことである．

■基底 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W 上のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が W の**基底** a basis であるとは

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立，かつ
- $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$

が成り立つことである．

例 13.1. $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots \qquad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

の組 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底** the canonical basis of $\mathbb{R}^n$ という．

例 13.2. $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるための必要十分条件は $\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \neq 0$ となることである．

実際，$\{\boldsymbol{a}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底ならば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立だから，$\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \neq 0$ が成り立つ．

逆に $\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \neq 0$ が成り立っているならば，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立なので $\mathbb{R}^n = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ であることを示せばよい．実際, 正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ は正則だから，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{c}$ が存在する．とくに $\boldsymbol{c} = {}^t[c_1, \ldots, c_n]$ と書けば $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ となり $\mathbb{R}^n \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ が分かる．定義より $\mathbb{R}^n \supset \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ なので結論を得る．

一般に，$\mathbb{R}^n$ の部分空間の基底は無数にある：For a given subspace W of $\mathbb{R}^n$, there are infinitely many bases of W[*1].

次の事実の詳細は後期に扱う．

事実 13.3. $\mathbb{R}^n$ の $\{\boldsymbol{o}\}$ でない任意の部分空間には基底が存在する．

2012 年 7 月 19 日

[*1] 単数，複数に注意．基底 a basis は単数形．$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ を集合と見なして一つのものと考える．基底とはベクトルの組の属性であって，その一つ一つのベクトルの属性ではない．基底 basis の複数形は bases.

定理 13.4. 部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ が与えられているとき，W の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + x_r\boldsymbol{a}_r \qquad (x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R})$$

の形にただひと通りに (一意的に) 表される．

証明. W は $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ で生成されるから，$\boldsymbol{x} \in W$ はそれらの一次結合で表される．さらに

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + x_r\boldsymbol{a}_r = y_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + y_r\boldsymbol{a}_r$$

と表されるならば $(x_1 - y_1)\boldsymbol{a}_1 + \dots + (x_r - y_r)\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$．ここで $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立だから $x_1 - y_1 = \dots = x_r - y_r = 0$．すなわち，$x_j = y_j$ $(j = 1, \dots, r)$ が成り立つから，結論の形の表し方はひと通り． □

例 13.5. $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1, 0, 1]$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t[1, 1, 1]$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t[0, 1, 1]$ とすると $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える (確かめよ)．そこで，与えられたベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t[2, -1, 3]$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で表そう．

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \qquad A := [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく．これを c_1, c_2, c_3 に関する連立一次方程式とみなせば $c_1 = 4$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$．したがって

$$\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3.$$

■基底を構成するベクトルの個数　ここでは次の定理を示す：

定理 13.6. 部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ の基底を構成するベクトルの個数は基底のとりかたによらず一定である．

これを示すためにいくつか準備をしておこう：次は，行列の基本変形の性質による：

補題 13.7. $s \times n$ 型の行列 B の階数は s, n 以下である：$\operatorname{rank} B \leqq \min\{s, n\}$.

証明. B が行基本変形により階段行列 C に変形できたとすると，ある s 次正則行列 P が存在して $PB = C$ の形に書ける．C は $s \times n$ 型行列で，その $\vec{o}$ でない行の個数が $\operatorname{rank} B$ だから $\operatorname{rank} B \leqq s$．また，階段行列の $\boldsymbol{o}$ でない各行の左側の 0 の並びの長さは，一行下がるたびに 1 以上増えるから，C が $s \times n$ 型であることに注意すると $\operatorname{rank} B \leqq n$. □

連立一次方程式の掃き出し法による解法から，次のことがわかる．きちんと証明しようとすると記述が面倒くさいが，“$\mathbb{R}^n$ のベクトルを未知関数とする同次連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は $n - \operatorname{rank} B$ 個の任意定数を含む” という事実をよく見れば，その任意定数を係数とするベクトルが一次独立になることがわかる．

補題 13.8 (同次連立 1 次方程式の解の表示)**.** $r \times n$ 型の行列 B に対して，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を未知数とする同次連立一次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間は，ある一次独立な s 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s$ により生成される．ただし $s = n - \operatorname{rank} B$．とくに，この方程式が自明な解 $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o})$ しか持たないための必要十分条件は $n - \operatorname{rank} B = 0$.

補題 13.9. $s \times r$ 型行列 A と $r \times s$ 型行列 B が $BA = I$ (I は r 次単位行列) を満たしているならば $\operatorname{rank} B \geqq r$ が成り立つ．

証明. B が行基本変形により階段行列 C に変形されたとすると，$PB = C$ となる r 次正則行列 P が存在する．もし $\operatorname{rank} B < r$ ならば，C の第 r 行の成分はすべて 0 なので DA の第 r 行の成分も全て 0．ここで仮

定から $DA = P^{-1}BA = P^{-1}I = P^{-1}$ なので，正則行列 P^{-1} の第 r 行はすべて 0．これは P^{-1} の正則性に矛盾しているので $\operatorname{rank} B \geqq r$ でなければならない． □

以上から，次がわかる：

命題 13.10. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が与えられているとする．このとき

(1) $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s \in W$ が一次独立ならば $s \leqq r$ である．
(2) $W = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s \rangle$ ならば $s \geqq r$ である．

証明. (1): W は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ で生成されているから，各 j に対して $\boldsymbol{b}_j = b_{1j}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{rj}\boldsymbol{a}_r$ $(b_{lj} \in \mathbb{R})$ と表すことができる．これを行列で表すと，

$$(*) \qquad [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s] = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]B, \qquad B = [b_{ij}]_{1 \leqq i \leqq r; 1 \leqq j \leqq s}$$

と書ける．すると $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ の一次独立性から

$$\begin{aligned}
c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{o} \quad &\Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \qquad \left(\boldsymbol{c} = {}^t[c_1, \ldots, c_s]\right) \\
\Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \quad &\Leftrightarrow \quad d_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \qquad \left(B\boldsymbol{c} = {}^t[d_1, \ldots, d_r]\right) \\
\Leftrightarrow \quad d_1 = \cdots = d_r = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}.
\end{aligned}$$

したがって $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ が一次独立であるための必要十分条件は，未知ベクトル $\boldsymbol{c}$ に関する連立一次方程式 $B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ が自明な解しかもたないことである．したがって補題 13.8 から $\operatorname{rank} B = s$．ところが補題 13.7 から $\operatorname{rank} B \leqq \min\{r, s\} \leqq r$ であるから，$s \leqq r$.

(2): W が $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ で生成されるから，各 m に対して $\boldsymbol{a}_m = \alpha_{1m}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_{sm}\boldsymbol{b}_s$ $(\alpha_{jm} \in \mathbb{R})$，すなわち

$$[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s]A, \qquad A = [\alpha_{lm}]_{1 \leqq l \leqq s; 1 \leqq m \leqq r}$$

と書ける．一方，W は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ でも生成されているから $(*)$ も成り立っている．これらから $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = BA[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]$ が成り立つが，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立だから，$BA = I$ (I は r 次単位行列) が成り立つ（なぜか）．したがって，補題 13.9 より $\operatorname{rank} B \geqq r$．ところが補題 13.7 から $\operatorname{rank} B \leqq \min\{r, s\} \leqq s$ であるから，r $\leqq s$. □

このことから定理 13.6 は従う．

■次元

定義 13.11. $\mathbb{R}^n$ の $\{\boldsymbol{o}\}$ 部分空間 W の基底を構成するベクトルの個数を W の**次元** dimension といい，$\dim W$ と書く．また $\dim\{\boldsymbol{o}\} = 0$ と定める．

例 13.12. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

問題

13-1 $\mathbb{R}^2$ の 1 次元部分空間をすべてあげなさい．
13-2 テキスト 91 ページ問 12.
13-3 テキスト 111 ページ 4.4, 4.5, 4.6; 112 ページ 4.15.