山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は，解答用紙の**所定の欄**に，**採点者が読みとり，理解することができるよう**に書いてください．
- 裏面・計算用紙は下書き，計算などに使用して良いですが，採点の対象とはしません．
- 試験終了後は，**解答用紙すべて**と**持込用紙**を回収します．**持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**．問題用紙は持ち帰っていただいて結構です．
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し，正しいと思われる問題に直して解答してください．
- 答案は **8 月 7 日（火曜日）**より**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします．
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は，**8 月 10 日までに電子メイルにてその旨ご連絡ください．**なお，(1) 対象は書かれた答案です．**答案に書かれていないことは議論の対象としません．**(2) 管理の都合上，上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません．**ご了承下さい．

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{9}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れ，下線 **a** ~ **b** をつけた部分の証明を与えなさい． [55 点]

同次連立 1 次方程式

$$(*)\qquad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\qquad ただし\qquad A=\begin{bmatrix}1&3&1&1&7\\0&0&-1&-1&-6\\2&6&1&1&8\\-1&-3&1&0&3\end{bmatrix}$$

の解空間を V とする．すなわち

$$V:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\}\subset\mathbb{R}^{\boxed{1}}.$$

行列 A の階数 $\operatorname{rank}A=\boxed{2}$ だから，方程式 $(*)$ の解は $\boxed{3}$ 個のパラメータを含む．それらのパラメータを $t_1,\dots,t_{\boxed{3}}$ と書くと，V は $V=\boxed{4}$ と（集合の記法を用いて）表すことができる．すなわち V はベクトル $\boxed{5}$ で生成される $\mathbb{R}^{\boxed{1}}$ の部分空間であるが，$_{\mathbf{a}}$<u>$\boxed{5}$ のベクトルたちは 1 次独立</u>であるから，V の次元は $\dim V=\boxed{6}$ となる．
一方，ベクトル

$$(**)\qquad \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\6\\-3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}7\\-6\\8\\3\end{bmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^{\boxed{7}}$ の部分空間を W と書く：

$$W=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5\rangle.$$

式 $(**)$ のベクトルたちは 1 次独立ではないが，それらの中から選び出した $\boxed{8}$ ($\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_5$ のうちいくつかを入れる）は 1 次独立であって，かつ $_{\mathbf{b}}$<u>W を生成する</u>．したがって $\{\boxed{8}\}$ は W の基底であって，$\dim W=\boxed{9}$ である．

裏面につづく

問題 B 次を求めなさい [20 点]

(1) 10 次正方行列 A の余因子行列を $\widetilde{A}$, $B := 2A$ の余因子行列を $\widetilde{B}$ とするとき $\widetilde{B} = k\widetilde{A}$ となるようなスカラ k.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき A^{-1}. ただし a, b, c は定数.

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき $\det A$.

(4) 集合 $X = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \alpha xy + 2y^2 = 0 \right\}$ が $\mathbb{R}^2$ の部分空間になるような定数 α の条件.

問題 C 次は正しいか．正しければ○，そうでなければ×を解答欄の [ ] 内に記し，その理由を述べなさい．[25 点]

(1) 正方行列 A の行列式 $\det A$ が 0 でないならば，A は正則である．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ ののうち，どの 2 つを選んでも平行でないならば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立である．

(3) 一般に $\mathbb{R}^n$ の部分空間にはただ一つの基底が存在する．

(4) 各成分 が t の微分可能な関数であるような正方行列 $A(t)$ に対して，$\dfrac{d}{dt}\det A(t) = \det\left(\dfrac{dA(t)}{dt}\right)$.

(5) $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は 1 次独立である．ただし "×" はベクトル積を表す.

問題 D [0 点] 解答用紙 4 をご覧ください.

おつかれさまでした ♡

2012 年 8 月 2 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：各 5 点

1	2	3	4
5	3	2	$\left\{ t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

5	6	7	8	9
$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	2	4	$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4$	3

a の証明

$$t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ -4t_2 \\ -2t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 0, \qquad t_2 = 0.$$

したがって，これらの 2 つのベクトルは 1 次独立である．

b の証明

$\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4$ が成り立つ (行列 A を階段行列に変形してやるとわかる)．したがって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in W \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 + c_5\boldsymbol{a}_5 \quad (c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R}) \quad \text{と書ける} \\ &\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = (c_1 + 3c_2 + c_5)\boldsymbol{a}_1 + (c_3 + 4c_5)\boldsymbol{a}_3 + (c_4 + 2c_5)\boldsymbol{a}_4 \\ &\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \rangle. \end{aligned}$$

したがって W は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ で生成される．

学籍番号	氏　名

線形代数学第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：各 5 点

(1)	(2)	(3)	(4)
512	$\begin{bmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	-35	$-2\sqrt{2} \leqq \alpha \leqq 2\sqrt{2}$

(4): $|\alpha| < 2\sqrt{2}$ のとき $X = \{\boldsymbol{o}\}$, $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$ のとき $X = \{{}^t[x, y] \mid x \pm \sqrt{2}y = 0\}$

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

(1) [○]

A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)I$. もし $\det A \neq 0$ ならば,
$B = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$ とすれば $AB = BA = I$. したがって A は正則.

(2) [×]

$\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1, 0]$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t[0, 1]$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t[1, 1]$ とすると,
$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3$ と $\boldsymbol{a}_1$ はそれぞれ平行ではない. しかし $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o}$
であるから $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属.

(3) [×]

$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である.
ここで $\boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[0, 1]$, $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1, 1]$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t[0, 1]$ とおく. すると $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$,
$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ はともに $\mathbb{R}^2$ の基底である.

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄（つづき）

(4) [×]

$A(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $\det A(t) = t$ なので

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = 1, \qquad \det\left(\frac{dA(t)}{dt}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

(5) [○]

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交する．さらに $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立なので $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$.
いま $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$ とおき，その両辺に $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を内積すると，
$c_3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = 0$．$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq 0$ なので $c_3 = 0$ を得る．
すると $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ となるが，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立であるから $c_1 = c_2 = 0$.
したがって $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が得られる．

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

**この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名のみを記入し
それ以外は記入しないこと**

問題 D この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません． [0 点]

回答欄：

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表に従って着席してください．2012 年度入学の方は学籍番号の下 5 桁，それ以外の方は氏名が表示してあります．
座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください.

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．**(遅刻者への対応はあとまわしにする)**
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- 解答用紙 5 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名