線形代数学第一
講義ノート

東京工業大学 全学科目
2012 年度前期

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

1　複素数と平面

■複素数　高等学校で学んだ複素数 (complex numbers) について，いくつかの記号と用語を追加しておく．

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数; real numbers) に対して

$$\bar{z} = x - iy, \qquad \operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z = y = \frac{-i}{2}(z - \bar{z})$$

をそれぞれ z の**共役** (conjugate)[*1], **実部** (real part), **虚部** (imaginary part) とよぶ．とくに $\operatorname{Im} z = 0$ のとき z は実数である．また $\operatorname{Re} z = 0$ となる複素数を**純虚数** (pure imaginary) ということがある．

さらに $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geqq 0$ である[*2]ことに注意して，

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定まる負でない実数 $|z|$ を複素数 z の**絶対値** (absolute value) という．

■複素平面　実数は数直線上の点とみなすことができる．同様に，座標平面上の点 (x, y) に対して複素数 $x + iy$ を対応させることにより，座標平面を複素数全体の集合とみなすことができる．このようにみなした座標平面のことを**複素平面** (complex plane) といい[*3]，複素平面の横軸を**実軸** (real axis)，縦軸を**虚軸** (imaginary axis) という．複素数 z を複素平面上の点とみなすとき，0（座標原点; origin）と z を結ぶ線分 $0z$ の長さは $|z|$ である．さらに，$z \neq 0$ のとき，線分 $0z$ が実軸上の正の部分となす角 θ のことを z の**偏角** (argument) といい，$\arg z$ で表す（図 1）．複素数 z $(\neq 0)$ の偏角は 2π の整数倍の任意性を持っている．たとえば，正の実数の偏角は 0 といえるが 2π，-4π などともいえる．一般に 0 でない複素数 z を，絶対値と偏角を用いて

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r = |z|, \theta = \arg z)$$

と表すことができる．とくに

(1.1)
$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$$

とおくと，これは絶対値 1 の複素数である．[*4] 逆に絶対値 1 の複素数は $e^{i\theta}$ の形で表される．この記号を用いると，任意の複素数 z は

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r \geqq 0,\ \theta \text{ は実数})$$

の形に表すことができる．とくに $z \neq 0$ ならば，θ は 2π の整数倍だけの差を除いて一通りに定まる．

このような複素数の表し方を**極表示** (polar form) という．

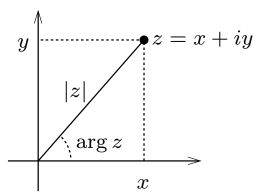

図 1　複素平面

2012 年 4 月 12 日 (2012 年 5 月 17 日訂正)

[*1] 「きょうやく」と読む．本当は「共軛」が正しいので「きょうえき」とは読まない．

[*2] この不等式は，“実数であって，かつ 0 以上である” という意味を表している．

[*3] ガウス平面 (the Gauss plane)，ガウス-アルガン平面 (the Gauss-Argand plane) ともいう．ある時期の高等学校の教科書では，“複素数平面” という用語が使われていたが，あまり一般的ではないように思う．

[*4] 式 (1.1) は「e の $i\theta$ 乗はこのようになる」という意味ではなく，今日から「$e^{i\theta}$ という記号の意味をこのように定める」という意味である．

■複素数の積の極表示と平面の回転　正弦・余弦の加法定理から

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

が成り立つ．したがって，極表示された複素数 $z = re^{i\alpha}$, $w = se^{i\beta}$ の積は

$$zw = (rs)e^{i(\alpha+\beta)}$$

となる．すなわち，

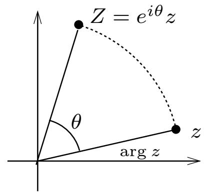

図 2　複素平面上の回転

(1.2)　　二つの複素数の積の絶対値は絶対値の積，積の偏角は偏角の和となる．

とくに $|zw| = |z|\,|w|$ である．したがって，

(1.3)　　複素数 z に対して，$e^{i\theta}z$ は，複素平面上の点 z を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点を表す．

とくに点 (x, y) を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点を (X, Y) とすると

$$X + iY = e^{i\theta}(x + iy) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$$

であるから，右辺を計算して実部・虚部をとれば，次のことがわかる（図 2）．

事実 1.1. 座標平面上の点 (x, y) を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点 (X, Y) は

$$(X, Y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \qquad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であたえられる．

■平面ベクトルの内積・外積　複素数 $z = x + iy$ を平面ベクトル (x, y) とみなすとき，二つの複素数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ (x, y, u, v は実数) に対して

$$\mathrm{Re}\,\bar{z}w = xu + yv = z \cdot w = (z \text{ と } w \text{ の内積 (inner product)})$$

を与えている．いま

(1.4)
$$z \times w := \mathrm{Im}(\bar{z}w) = xv - uy$$

とおこう．これを (z, w をベクトルとみなしたときの) 平面ベクトルの**外積** (outer product; exterior product) という．

■代数学の基本定理

定理 1.2 (代数学の基本定理)**.** 複素数を係数とする z の $m(\geqq 1)$ 次多項式 (polynomial)

(1.5)
$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad (a_j\ (j = 0, \ldots, m) \text{ は複素数で } a_m \neq 0)$$

は複素数の根 (root) を持つ．すなわち $f(z_0) = 0$ となる複素数 z_0 が存在する．

この定理の証明は講義の範囲を超えるが，事実として（主に後期に）用いる．とくに，定理 1.2 の根 z_0 をひとつとると，因数定理により $f(z)$ は $(z - z_0)$ で割り切れ，商は $m - 1$ 次の多項式になる．この商に代数学の基本定理を再び適用すると，これはまた z の 1 次式で割り切れる．これを繰り返すことにより，m 次多項式 (1.5) は

$$f(z) = a_m(z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_{m-1}) \qquad (z_0,\ \ldots,\ z_{m-1} \text{ は複素数})$$

と複素数の範囲で因数分解されることがわかる．

問題

1-1 複素数 z が実数 (純虚数) であるための必要十分条件は $z = \bar{z}$ ($z = -\bar{z}$) が成り立つことであることを確かめなさい.

1-2 複素数 z, w に対して次が成り立つことを確かめなさい：

$$\overline{(z \pm w)} = \bar{z} \pm \bar{w} \quad \text{(複号同順)}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

ただし最後の等式では $w \neq 0$ とする.

1-3 整数 m と実数 θ に対して

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m \qquad \text{(de Moivre の公式)}$$

を確かめなさい．これを用いて，余弦 (cosine), 正弦 (sine) の 5 倍角の公式を作りなさい.

1-4 複素数 z, w を平面ベクトルとみなし，それらが平行でないとするとき，その外積は $z \times w = \varepsilon S$ となることを確かめなさい．ただし S はベクトル z と w を 2 辺とする平行四辺形の面積,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & (w \text{ が } z \text{ に対して左側にある}) \\ -1 & (w \text{ が } z \text{ に対して右側にある}). \end{cases}$$

1-5 複素平面上の 4 点を複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 で表すとき，これらの 4 点が一直線上，または同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$$

が実数となることである．このことを確かめなさい (ヒント：円周角の性質を用いる)．この値を 4 つの複素数の**非調和比**，**複比** (cross ratio) ということがある.

1-6 虚数単位 i の平方根 (2 乗して i になる複素数；square root), 3 乗根 (3 乗して i になる複素数；cubic root) を全て求めなさい.

1-7 式 (1.5) の多項式 $f(z)$ の係数 $a_0, \ldots, a_m$ がすべて実数であるとする．このとき，ζ が $f(z)$ の根であれば，その共役複素数 $\bar{\zeta}$ も根であることを示しなさい．さらに，これを用いて，実数を係数とする多項式はいくつかの 1 次式と 2 次式の積の形に因数分解されることを示しなさい.

1-8 式の変形

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^2(z-1)\left\{\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1\right\}$$

を用いて $2\pi/5$ の余弦，正弦の値を求めなさい.

1-9 複素数 $z = x + iy$ に対して実数を成分とする 2 次正方行列 $\varphi(z)$ を

$$\varphi(z) := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

を対応させる対応の規則 φ を考えると，任意の複素数 z, w に対して

$$\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w), \qquad \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w), \qquad \varphi\left(\frac{z}{w}\right) = \varphi(z)\varphi(w)^{-1}$$

が成り立つことを確かめなさい．ただし，最後の等式では $w \neq 0$ とする．また，右辺の演算は，行列としての演算である.

2　空間の平面と直線

■座標空間　この講義では，**実数全体の集合** (the set of real numbers) を太字の R を用いて $\mathbb{R}$ と表す[*5]．同様に，複素数全体の集合を (the set of complex numbers) を $\mathbb{C}$ と表す．

対象 x が集合 A の**要素** (element, menber) である，ということを $x \in A$ と書く．また，集合 B のすべての要素が集合 A の要素となっているとき，B は A の**部分集合** (subset) であるといって，$B \subset A$ と書く[*6]．

座標平面は，２つの実数の組全体の集合とみなすことができる．また，**座標空間**は３つの実数の組全体の集合である．これらをそれぞれ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ と書く[*7]：

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^3$ の要素を**ベクトル** (vector) とみなすとき，それを太字の小文字で表すことが多い：

$$\boldsymbol{a} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

また，$\mathbb{R}^3$ の要素を**点** (point) とみなすときは，英文字の大文字を使う[*8]：

$$P = (1, 0, 0), \qquad O = (0, 0, 0).$$

■内積　$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の大きさを

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

で表す．零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす**角** (angle) を θ とするとき

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos\theta \tag{2.1}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積** (inner product) という．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の少なくとも一方が零ベクトルであるときは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ とする[*9]．とくに $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{2.2}$$

が成り立つ．

２つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ を満たすとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は**直交する** (orthogonal) という[*10]．

2012 年 4 月 19 日 (2012 年 4 月 26 日訂正)

[*5] 本によっては $\boldsymbol{R}$ や $\mathbf{R}$ を用いることもある．

[*6] 高等学校の教科書などでは，このことを $B \subseteq A$ と書くことが多いようだが，このように $B \subset A$ と書く方が多数派のように見える．この記号に従えば $A \subset A$ である．

[*7] 「あーるに」「あーるさん」と読むのが普通.「あーるのにじょう」「あーるのさんじょう」などとは読まない．テキストでは $\mathbb{R}^2$ の要素を，数を縦に並べて角カッコ [ ] で囲んで表している．縦に並べるのが標準的と思われるが，今回は高等学校の教科書の続きで横に並べてみた．行列やベクトルを表すカッコは ( ) (丸カッコ, parentheses) を使う人も [ ] (角カッコ, brackets) を使う人もいる．

[*8] 高等学校の教科書では，大文字立体 (ローマン体) を用いて $\mathrm{P}(1, 0, 0)$ などと書いたかもしれない．

[*9] 高等学校の多くの教科書では，ベクトルの内積をこのように定めているが，この授業の後半（後期の線形代数学第二）では，内積の定義のしかたをより抽象的な形に変更する．テキスト 5 章を参照せよ．また，テキストでは内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ のようにカッコを用いて表している．

[*10] したがって，零ベクトルはすべてのベクトルと直交する．高等学校の教科書の “垂直である” という概念とすこしだけ異なる．

■座標平面や座標空間の図形　次の文の意味を考えよう：

(2.3)　方程式 $x - 2y + 2 = 0$ は，座標平面上の，点 $(-2, 0)$ を通り，ベクトル $(2, 1)$ に平行な直線を表す．

これは，座標平面上の点の集合

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y + 2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.4}$$

が，$(-2, 0)$ を通り $(2, 1)$ に平行な直線となる，ということを意味している．

一般に，x, y の 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して「方程式 $f(x, y) = 0$ が表す座標平面上の図形」とは，集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ のことである．

同様に 3 変数関数 $g(x, y, z)$ に対して，方程式 $g(x, y, z)$ は，座標空間上の図形

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$$

を表す．

■空間の平面　零ベクトルでない空間のベクトル $\boldsymbol{v} = (a, b, c) \neq \boldsymbol{0}$ と点 $P = (p, q, r)$ をひとつ固定すると，

(2.5)　ベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，点 P を通る平面

がただ一つ存在する．この平面を Π と書くと[*11]，点 $X = (x, y, z)$ が平面 Π 上にあるための必要十分条件は

$$PX \perp \boldsymbol{v} \qquad \text{すなわち} \qquad \overrightarrow{PX} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

となることである．この第二式を成分を用いて書きなおせば

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad ax + by + cz + d = 0 \qquad (d = -(ap + bq + cr))$$

となる．すなわち

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\} \qquad (d = -ap - bq - cr)$$

となる．

一般に (x, y, z) の 1 次式 $ax + by + cz + d$ $((a, b, c) \neq (0, 0, 0))$ に対して

$$\Pi = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0\} \tag{2.6}$$

は $\mathbb{R}^3$ の平面を表す．

> 実際，$a \neq 0$ とするならば，
>
> $$ax + by + cz + d = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0$$
>
> と書き換えられる．したがって $ax + by + cz + d = 0$ は点 $(-d/a, 0, 0)$ を通りベクトル (a, b, c) に垂直な平面を表している．仮定から $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ なので，$a = 0$ の場合は $b \neq 0$, $c \neq 0$ のいずれかが成り立つから，同様に議論で $ax + by + cz + d = 0$ は平面を表すことがわかる．

平面に垂直な，零ベクトルでないベクトルを平面の**法ベクトル** (normal vector) という．式 (2.6) で表される平面 Π に対して $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ はその法ベクトルである．さらに，任意の Π の法ベクトルは $\boldsymbol{v}$ の 0 でない実数倍である．

2 つの平面の**なす角**とは，その法ベクトルがなす角のことである，と定める．とくに 2 平面の法ベクトルが平行 (parallel) であるときそれらは平行であるという．

[*11] ギリシア文字の大文字 “pi”．ローマ文字の p に相当するので，ここでは平面 plane の意味で用いた．

■平面のパラメータ表示　例として，方程式 $2x-3y+z=1$ が表す平面 Π を考える：

$$\Pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 2x-3y+z=1\} \tag{2.7}$$

点 $(1,1,2)$ がこの平面上にある，すなわち $(1,1,2)\in\Pi$ であることはすぐに確かめられる．それでは，この平面上の点を 10 個あげてみよう．闇雲にやっても良いが，たとえば，新しい変数 (u,v) を導入して

$$x=u, \qquad y=v, \qquad z=-2u+3v+1, \qquad \text{すなわち} \qquad (x,y,z)=(u,v,-2u+3v+1) \tag{2.8}$$

とおくと，この (x,y,z) は自動的に Π 上の点になっている．したがって (u,v) に適当に 10 個の値の組を入れてやれば，平面上の点 10 個が得られたことになる．一方，Π 上の点は (2.8) のように表すことができる．すなわち，集合の等式

$$\Pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 2x-3y+z=1\} = \{(u,v,-2u+3v+1)\,|\,u,v\in\mathbb{R}\}$$

が成り立つ．このように，補助的な変数 (u,v) を用いて平面（一般に図形）を表す方法を**助変数表示**，**パラメータ表示**および (u,v) を**助変数**，**径数**，**パラメータ** (parameter) という．一般に，ベクトル $\boldsymbol{a}=(p_a,q_a,r_a)$, $\boldsymbol{b}=(p_b,q_b,r_b)$ が互いに平行でないならば[*12],

$$\{u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\,|\,u,v\in\mathbb{R}\} \qquad (\boldsymbol{c}\text{ は定ベクトル})$$

は平面を表す．とくに，この平面は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に平行で $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$ となるような点を通る．

■直線の方程式　空間の平行でない 2 平面の共通部分 (intersection) は直線 (line) である．したがって，例えば[*13]

$$\Lambda = \left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{cases}2x-3y+z=1\\ x-2y+3z=-2\end{cases}\right\} = \Pi_1\cap\Pi_2 \qquad \begin{pmatrix}\Pi_1=\{(x,y,z)\,|\,2x-3y+z=1\}\\ \Pi_2=\{(x,y,z)\,|\,x-2y+3z=-2\}\end{pmatrix}$$

は 2 つの平面 Π_1, Π_2 の共通部分の直線を表す．

$$\begin{cases}2x-3y+z=1\\ x-2y+3z=-2\end{cases} \tag{2.9}$$

は直線の方程式を与えている．この直線 Λ 上の点をたくさん見つけるために (2.9) を変形しよう[*14]：

$$\begin{cases}2x-3y+z=1\\ x-2y+3z=-2\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases}x-7z=8\\ y-5z=5\end{cases}$$

に気がつけば，あたらしい助変数 t を導入して

$$\Lambda = \{(7t+8,5t+5,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

と書きなおすことができる．このような表示を直線の**パラメータ表示**という．平面の場合はパラメータとして 2 つの変数が必要だが，直線は 1 つのパラメータで表示されることに注意しよう．

一般に零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$\{\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{v}\,|\,t\in\mathbb{R}\} \qquad (\boldsymbol{c}\text{ は定ベクトル})$$

は $\boldsymbol{v}$ に平行で $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$ となる点 P を通る直線を表す．

[*12] しばらく後では**一次独立**という言葉を用いる．

[*13] Λ はギリシア文字 λ (ラムダ；lambda) の大文字．直線 (line) の頭文字として用いた．

[*14] “$\Leftrightarrow$” はこの矢印の両側が同値，すなわち右側が成り立つことが左側が成り立つための**必要十分条件**であることを表している．

問題

2-1 内積の定義 (2.1) から成分表示の式 (2.2) を導きなさい（ヒント：余弦定理を用いる).

2-2 $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ のとき $ax + by + cz + d = 0$ はどんな図形を表すか.

2-3 2 つの平面 $x + 2y - 3z = 1$，$2x + 4y + az = b$ (a, b は実数の定数) の共通部分が直線になるのはどんなときか．そのとき，共通部分の直線をパラメータ表示しなさい．また，直線にならないとき，2 平面の共通部分はどんな図形か.

2-4 3 つの平面 $x + 2y - 3z = 1$, $2x + y + z = 0$, $x + y + az = b$ (a, b は実数の定数) の共通部分はどんな図形か.

2-5 2 直線

$$\Lambda_1 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \Lambda_2 : \begin{cases} 7x + 5y = a \\ bx + z = c \end{cases} \qquad (a,\ b,\ c \text{ は実数の定数})$$

が 1 点で交わるのはどんなときか．そのときの交点の座標を求めなさい．それ以外の場合は 2 直線はどのような位置関係にあるか.

2-6 座標空間の座標を (x, y, z) と書く．座標空間の点 $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, xy 平面上の第一象限の点 B，z 座標が正であるような点 C を $OABC$ が正四面体になるようにとる.

(1) B, C の座標を求めなさい.

(2) 3 点 O, A, C を含む平面の方程式を求めなさい.

(3) 正四面体 $OABC$ の 2 つの面がなす角を求めなさい.

(4) 正四面体 $OABC$ の 2 つの辺がなす角を求めなさい.

2-7 地球の中心を原点とし，赤道が xy 平面，経度 0 の子午線が xz 平面上の $x \geqq 0$ の半平面に含まれるような座標系 (x, y, z) を取る．地球の半径を R とすると，東経 θ, 北緯 φ の地点の座標は

$$\bigl(R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\bigr) \qquad \left(-\pi < \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される．このことを確かめなさい.

球面 (sphere) 上の 2 点 P, Q を結ぶ球面上の曲線のうち，長さが最短であるようなものは，2 点を通る大円 (great circle; P, Q および中心を通る平面と球面の共通部分) の弧のうち短い方であることが知られている.

いま，点 P を大岡山 (the Great Okayama; 東経 139.7 度，北緯 35.6 度)，点 Q を花の都パリのエッフェル塔 (la tour Eiffel; 東経 2.3 度，北緯 48.8 度) とするとき，P, Q を地球上で結ぶ最短線の長さを求めなさい．ただし，地球の半径は 6,400Km とする．（ヒント：地球の中心を O とするとき，角 POQ を求めればよい．具体的な値を求めるには電卓などを用いる．逆三角関数を用いるときは角度の単位に注意.）

■注：逆三角関数　上の問題の一部では，微分積分で学んだ逆三角関数のうち逆余弦関数を用いるかもしれない：

$$y = \cos^{-1} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \cos y, \quad 0 \leqq y \leqq \pi.$$

“$\cos^{-1}$” は “arccos” と書くこともある.

3　行列

■言葉 (§1.1)

- 行列，行，列，$m \times n$ 型行列，(i, j)-成分
- 成分の添字表示

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

- 正方行列，m 次正方行列，対角成分，対角行列.
- 行ベクトル，列ベクトル，m-次行（列）ベクトル

■演算 (§§1.2, 1.3)　どのようなサイズの行列に対して定義されるか/ 数の演算との違いは何か.

- 和，差，零行列 (O), 定数倍またはスカラ倍
- 積，単位行列 (I, I_m), クロネッカーのデルタ記号 δ_{ij}
- 可換な行列，非可換な行列.
- 正方行列のべき乗

■転置行列 (§1.4)

- 転置行列 $({}^t\!A)$
- 転置行列と行列の積 $({}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A)$
- 対称行列，交代行列, 上三角行列，下三角行列

問題

3-1 $m \times k$ 行列 A と $k \times n$ 行列 B に対して ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$ であることを証明しなさい.

3-2 正方行列 A に対してその対角成分の総和を A の**跡** または **トレース** といって，$\operatorname{tr} A$ とかく.

- ふたつの n 次正方行列 A, B に対して $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ が成り立つことを証明しなさい.
- 実数を成分とする正方行列 A に対して，$\operatorname{tr}({}^t\!AA) \geqq 0$ であることを証明しなさい．等号が成り立つのはどんなときか.

3-3 $A^2 - 3A + 2I = O$ を満たす 2 次正方行列を全て求めなさい.

3-4 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して $(A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = O$ となるような 2 次正方行列 B をすべて求めなさい.

3-5 任意の n 次正方行列と可換な n 次正方行列を求めなさい.

3-6 テキスト 1 ページから 11 ページの問；17 ページ 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 1.8, 1.9；18 ページ 1.13, 1.18, 1.21.

2012 年 4 月 26 日 (2012 年 5 月 10 日訂正)

4　行列 (2)

■対称行列・交代行列

- 定義 (テキスト 10 ページ)
- 性質 (11 ページ問 11, 12; 1 章の問題 1.7, 1.8, 1.9, 1.12, 1.13, 1.14, 1.21)

■正則行列

- 定義（正則行列，逆行列）：テキスト 11–12 ページ．
  何が定義で，何が定義から導かれる性質か．
  A^{-1} という記号を使って良いのはなぜか．

- 例 10, 例 11, 問題 1.20, 1.25 など：逆行列を求める公式は必要ない．使う道具は何か．
- 逆行列を求める公式は 70 ページ，定理 3.20．これの 2 次の場合が高等学校で習う公式だが，一般にはこの公式は実用的ではない．
- 逆行列の求め方は 37 ページ．

■行列の分割

- テキスト 13 ページ–
- 16 ページの例 15 は確かめておこう．

問題

4-1 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であり，そのとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

となることを示しなさい．

4-2 3 次正方行列

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

が正則であるための必要十分条件は

$$aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0$$

2012 年 5 月 10 日

であり,

$$B^{-1} = \frac{1}{aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg}\begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

であることを確かめなさい.

4-3 テキスト 11 ページから 16 ページの問; 17 ページ 1.1, 1.2, 1.10; 18 ページ 1.11, 1.12, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.19. 1.20; 19 ページ 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28. 1.29, 1.30.

5　連立 1 次方程式 (1)

■係数行列と拡大係数行列　未知数 (unknowns) $x_1,\ldots,\ x_n$ に関する**連立 1 次方程式** (a system of linear equations)

$$
(*)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}
$$

を

$$
(**)\qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \left(A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)
$$

と表す．このとき（テキスト 29 ページ），

- (m, n) 型行列 A を $(*)$ の**係数行列** という．
- $(m, n+1)$ 型行列 $(A, \boldsymbol{b})$ を $(*)$ の**拡大係数行列** という．
- $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ のとき $(*)$ は**斉次**または**同次** (homogenious) 連立 1 次方程式という．このとき $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ をこの方程式の**自明な解**という (テキスト 35 ページ).
- $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ のとき $(*)$ は**非斉次**または**非同次** (non-homogenious) 連立 1 次方程式という．

連立方程式 $(**)$ の**解**とは，集合

$$
(\star)\qquad \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{ただし} \qquad \mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle|\, x_1, \ldots, x_n \right\}
$$

のことである．ここで，考えている数の範囲は実数とした．もし，数の範囲を複素数とするなら，$(\star)$ の $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ で置き換えることになる．

連立 1 次方程式を**解く**とは，解 $(\star)$ を “パラメータ表示” することである．

例 5.1. 拡大係数行列が次の形になるような連立 1 次方程式

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

の解は $\{{}^t[2, 1, 0]\}$ である．このように解がひとつの要素からなるときは，「解は ${}^t[2, 1, 0]$ である」ということもある．

2012 年 5 月 17 日 (2012 年 5 月 31 日訂正)

例 5.2. 拡大係数行列が次の形になるような連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

を考えよう．ただし a は定数である．未知数を x_1, x_2, x_3, x_4 とすると，対応する連立方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 3 \\ x_3 & = 2 \\ x_4 & = 1 \\ 0 & = a \end{cases}$$

となる．

もし，$a \neq 0$ ならば最後の式は成立しない．したがって，方程式を満たす $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ は存在しないので，解は**空集合** (the empty set) である．

一方 $a = 0$ のときは，最後の式はいつでも成り立つから最初の三本だけを考えればよい．とくに x_3, x_4 の値は決まってしまうが x_1, x_2 は第一の条件を満たせば何でも良い．

$$x_1 + 2x_2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 & = 3 - 2t \\ x_2 & = t \end{cases} \qquad (t \text{ はスカラ})$$

と書けるので[*15]，与えられた連立方程式の解は

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3-2t \\ t \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と書ける．

■階段行列　このテキストでは “階段行列” は厳密な定義がある語である（25 ページ）．

- 階段行列の $\mathbf{0}$ でない行ベクトルの個数を**階数** rank という．テキスト 25 ページ (2) の記号では階数は k である．
- 拡大係数行列が階段行列であるような連立 1 次方程式は容易に解ける：
  - 最後の一列を取り除くと階数が下がる場合は解は空集合である．
  - 最後の一列を取り除いても階数が変わらない場合は，段の部分（テキスト 25 ページ (2) の $q_1, \ldots, q_k$ 列) 以外の部分に対応する未知数を “任意定数” とおけば，解がパラメータ表示できる．

■基本行列と行基本変形　基本行列 もここでは定義をもった語である (テキスト 22 ページ).

一方，行列に対して次の 3 つの操作を**行基本変形**という（テキスト 24 ページ）：

(R1) ある**行**に 0 でないスカラ c を掛ける．

(R2) ある**行**に別の行にスカラ c を掛けたものを加える．

[*15] ここの “バラナラバ” は「であるための必要十分条件は」と読む．

(R3) 二つの**行**を入れ替える．

事実 5.3. • 基本行列は正則行列である (テキスト 24 ページ，定理 2.1)

- 行基本変形の各々の操作は，左から基本行列をかけることと一致する．
- 任意の行列は，行基本変形を有限回施すことによって階段行列に変形することができる．（テキスト 25 ページ，定理 2.2）
- テキスト 25 ページ，定理 2.2 で得られる階段行列は，変形のしかたによらず，ただひと通りである．

行列 A から行基本変形によって得られる階段行列を A **の階段行列**という．

系 5.4. 正方行列 A が正則行列であるための必要十分条件は A の階段行列が単位行列となることである．

証明. A の階段行列を B とすると $PA = B$ となる正則行列 P が存在する．A が正則ならば，$B = PA$ は正則だが，正則な階段行列は単位行列しかない（演習問題参照）．逆に $B = I$ ならば，$A = P^{-1}B = P^{-1}$ となり A は正則である[*16]． □

注意 5.5. 同様に列基本変形（基本行列を右からかける）を考えることもできるが，当面は使わない．

■行基本変形によって階段行列に変形する 与えられた行列に行基本変形を施して階段行列にするのは次のレシピによる（掃き出し法，テキスト 26 ページ）：まず $k = 1$, $l = 1$ として

- 第 k 列に注目し，k の l 行目以下の成分のうち，0 でないものがあれば，そのうち一つに○をつける．もしそうでなければ k を一つ増やして同じことを行う．
- 上で○をつけた成分を含む行が l 行目になるように行の入れ替えを行う．
- l 行目に ○ の成分の逆数をかけて○の成分が 1 になるようにする．
- 上で l 行目になった行のスカラ倍を加えることにより k 列目の l 行目以外の成分を 0 にする（掃き出し）．
- k を一つ，l を一つ増やして最初のステップにもどる．

この操作で “○” をつけた成分を掃き出しの**ピヴォット** pivot とよぶ．

■行基本変形と連立 1 次方程式

定理 5.6. 行基本変形は連立 1 次方程式の解を変えない．すなわち，連立 1 次方程式 $(*)$ の拡大係数行列に行基本変形を施して得られる行列に対応する連立 1 次方程式の解は，$(*)$ の解と一致する．

証明. 連立方程式 $(*)$ を $(**)$ のように行列表示すると，拡大係数行列 A' は $A' = [A, \boldsymbol{b}]$ と書ける（行列の分割をしている）．A' に行基本変形を施した行列を $V' = [V, \boldsymbol{w}]$ とすると，行基本変形の性質から，ある m 次正則行列 P で $V' = PA'$ となるものが存在する．とくに

$$[V, \boldsymbol{w}] = V' = PA' = P[A, \boldsymbol{b}] = [PA, P\boldsymbol{b}]$$

であるから，V' に対応する連立 1 次方程式は $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ となる．ここで P は正則だから

$$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \ \Rightarrow\ P^{-1}PA\boldsymbol{x} = P^{-1}P\boldsymbol{b} \ \Rightarrow\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,; \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \Rightarrow\ PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

[*16] ここで，正則行列 A, B の積 AB が正則であること，正則行列の逆行列は正則であることを用いた（演習問題参照）．

であるから，

$$\{\boldsymbol{x} \mid V\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}\} = \{\boldsymbol{x} \mid PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

となり，2 つの方程式の解は一致する． □

■連立 1 次方程式の解法

- 拡大係数行列に行基本変形を行い，階段行列に変形する．
- 階段行列に対応する連立 1 次方程式を解く．

問題

5-1 前回の補足ともう少し：次を確かめなさい．

- 2 つの正則行列 A, B の積 AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$．（ヒント：ただかけてみればよい）
- 正則行列 A の逆行列は正則で $(A^{-1})^{-1} = A$．（ヒント：ただかけてみればよい）
- 正方行列 A の一つの行の成分がすべて 0 なら，A は正則でない．
  (ヒント：逆行列 X が存在したとして X を列ベクトルに分解し $AX = I$ という式をよく見る)．
- 正則な階段行列は単位行列である．

5-2 基本行列（テキスト 22 ページ，$P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij}）の (k, l) 成分を一般的に表す式を作りなさい（ヒント：クロネッカーのデルタ記号を用いる）．

5-3 次の連立 1 次方程式を解きなさい：

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +8x_4 & = & -3 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -4x_4 & = & 5 \\ x_1 & +2x_2 & +\ x_3 & +5x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +15x_4 & = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -2x_2 & +\ x_3 & +5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & -2 \\ x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +9x_4 & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

5-4 テキスト 29 ページ，問 5; 46 ページ 2.1, 2.3, 2.4, 2.5.

6　連立 1 次方程式 (2)

■行列の階数

定義 6.1. 階段行列の零ベクトルでない行の個数をその階段行列の**階数** rank という．

事実 6.2 (テキスト 定理 2.2, 2.11)**.** 任意の行列は，行基本変形によって階段行列に変形することができ，得られる階段行列は変形のしかたによらず一通りに定まる．

定義 6.3. 行列 A が行基本変形により階段行列 B に変形されるとき B の階数のことを A の**階数** rank といい，$\operatorname{rank} A$ と書く．

例 6.4. 階数が 0 であるような行列は零行列である．実際，階数 0 の階段行列は零行列である．行列 A の階数が 0 なら，A は行基本変形により零行列 O に変形される．行基本変形は，基本行列（正則行列）を左からかけることで得られるから，それらの基本行列の積をまとめて $PA = O$ となるような正則行列 P が存在する．P は正則なので $PA = O$ の両辺に P^{-1} をかければ $A = O$ を得る．

例 6.5. n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = n$ となることである．これを示そう．
(1) $n \times n$ 型の正則な階段行列は I である．実際，$n \times n$ 型の階段行列 B が I でないならば，第 n 行は零ベクトルになる．すると，任意の n 次正方行列 Y に対して BY の第 n 行は零ベクトルになるから $BY = I$ となる Y は存在しない．したがって B は正則でない．（示したいことの**対偶** contraposition を示していることに注意しよう．）
(2) $n \times n$ 行列 A が行基本変形により階段行列 B に変形できたとすると，$PA = B$ となる正則行列 P が存在する．(2a) A が正則ならば，積 PA も正則（テキスト 12 ページ，定理 1.2）だから B は正則．したがって (1) より $B = I$ なので $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$. (2b) $\operatorname{rank} A = n$ ならば (1) より $B = I$．したがって $PA = I$ となる．したがって A は正則で $P = A^{-1}$.（講義資料 5，1 ページ，前回の補足の 2 番目の項目参照）

■逆行列 (1)　例 6.5 で見たように，n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = n$ となることである．このとき，A は行基本変形により単位行列 I に変形される．とくに $PA = I$ となるので P は A の逆行列である．

例 6.6. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を階段行列に変形しよう．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\,行) + (-1)(1\,行)$$

2012 年 5 月 24 日 (2012 年 5 月 31 日訂正)

$$
\to \quad \begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&-2&0\end{bmatrix} \qquad (1\text{ 行})+(-2)(2\text{ 行})
$$

$$
\to \quad \begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&-2&0\end{bmatrix} \qquad (3\text{ 行})+2(2\text{ 行})
$$

$$
\to \quad \begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&6\end{bmatrix} \qquad (3\text{ 行})\times\frac{1}{6}
$$

$$
\to \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad (1\text{ 行})+5(3\text{ 行})
$$

$$
\to \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad (2\text{ 行})+(-3)(3\text{ 行})
$$

となり単位行列に変形できたので $\operatorname{rank} A=3$ である．ここで変形を表す行列を順番にかけ合わせて

$$
P:=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-2&5\\3&0&-3\\-1&2&1\end{bmatrix}
$$

とおくと $PA=I$ であるから $P=A^{-1}$ である．

■逆行列 (2) 掃き出し法　一般に n 次正方行列 A の逆行列を求めるとは $AX=I$ を満たす行列 X を求めることである．X を列ベクトルに分解すれば，これは 3 組の連立一次方程式であるが，係数行列は共通なので，一度に解くことができる：

> n 次正方行列 A に対して，$n\times 2n$ 行列 $[A,I]$ を行基本変形により階段行列に変形したとき $[I,P]$ の形であれば A は正則で $P=A^{-1}$，そうでなければ A は非正則である．

注意 6.7. 計算機などで逆行列を求めるのはここにあげた掃き出し法を（原理的には）用いるのが普通である．実は逆行列を求める公式（テキスト 定理 3.20）はある．これは理論的には重要だが，計算量が非常に大きいため，具体的に逆行列を求める問題では実用的ではない．

■同次連立方程式　“定数項” がすべて 0 であるような連立一次方程式を**同次** homogenious 連立一次方程式という．同次連立一次方程式

$$
(6.1)\qquad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o} \qquad \left(A\text{ は } m\times n \text{ 行列}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, \boldsymbol{o}\text{は零ベクトル}\right)
$$

を考える．

事実 6.8.
- $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ は (6.1) を満たす．これを**自明な解** the trivial solution という．
- $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ が (6.1) の解[*17]ならば $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ も解である．

[*17] 前回の用語では，(6.1) の解とは，集合 $\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\}$ であるが，その一つ一つの要素を “解” といったりもする．

- $\boldsymbol{x}_1$ が (6.1) の解ならば $\lambda\boldsymbol{x}_1$ (λ はスカラ) も解である．
- $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$,$\ldots$, $\boldsymbol{x}_k$ が (6.1) の解ならば，スカラ λ_1, $\ldots$, λ_k に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k$$

  も解である．
- $\operatorname{rank} A = r$ ならば方程式 (6.1) の解は

$$\{\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \text{ はスカラ }\} \qquad k = n - r$$

  の形に書ける．
- $m = n$ のとき，(6.1) が自明でない解をもつ必要十分条件は A が正則でないことである．

■非同次連立方程式　一般に，連立一次方程式

$$Ax = \boldsymbol{b} \qquad \left(A \text{ は } m \times n \text{ 行列}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}\right) \tag{6.2}$$

を考える．

事実 6.9.
- 方程式 (6.2) の解が**空集合** the empty set でないための必要十分条件は, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}]$ となることである．このとき，解は $n - \operatorname{rank} A$ 個のパラメータを用いて表すことができる．
- 方程式 (6.2) の解 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ に対して $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ は同次方程式 (6.1) の解である．
- 方程式 (6.2) の解 $\boldsymbol{x}_0$ をひとつ選ぶ．(6.1) の解が

$$\{\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \text{ はスカラ }\} \qquad k = n - \operatorname{rank} A$$

  の形にかけているならば，(6.2) の解は

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \text{ はスカラ }\}$$

  と表される．

問題

6-1 事実 6.8 を確かめなさい.
6-2 事実 6.9 を確かめなさい.
6-3 テキスト 47–49 ページ, 2.2, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18.
6-4 テキスト 49–50 ページ, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23.

7　行列式 (1)

■順列　正の整数 n に対して

- 長さ n の**順列** permutation とは，正の整数 $\{1,\dots,n\}$ をひとつずつ並べたものである．たとえば

$$(1),\qquad (2,1),\qquad (1,2,3),\qquad ,(1,4,3,2)$$

　はそれぞれ長さ 1, 2, 3, 4 の順列である．一方 $(1,2,4,2)$ は順列ではない．
- 長さ n の順列は $n!$ 種類ある．
- 長さ n の順列 $(p_1,\dots,p_n)$ に対して

$$\{(i,j)\,|\,1 \leqq i < j \leqq n, p_i > p_j\}$$

　の要素の個数を，この順列の**転倒数**という．例えば

$$(1,2,3,4)\qquad (1,3,4,2)$$

　の転倒数はそれぞれ 0, 2 である．
- 順列 $(p_1,\dots,p_n)$ の転倒数が r のとき，

$$\varepsilon(p_1,\dots,p_n) := (-1)^r$$

　をその順列の**符号** という．

定義 7.1 (行列式 (テキスト 53 ページ))**.** 正方行列 $A = [a_{ij}]_{1\leqq i,j\leqq n}$ に対して，スカラ

$$\sum_{(p_1,\dots,p_n)} \varepsilon(p_1,\dots,p_n) a_{1p_1}\dots a_{np_n} \tag{7.1}$$

を A の**行列式** determinant といって

$$\det A,\qquad |A|,\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

などと書く．ただし (7.1) の右辺の和は，長さ n の順列全てについてとる[*18]．

例 7.2.

- 1 次正方行列 $A = [a_{11}]$ に対して $\det A = a_{11}$.
- 2 次正方行列 $A = [a_{ij}]_{1\leqq i,j\leqq 2}$ に対して $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- 3 次正方行列の行列式は，問題 4-2 の公式の分母．（テキスト 39 ページ，例 7）

2012 年 5 月 31 日

[*18] 本によっては「順列」の代わりに「置換」という語を用いて行列式を定義しているが，本質的には同じものである．

■**行列式の性質**

- 上三角行列の行列式は対角成分の積（テキスト 58 ページ，例 12）
- $\det {}^tA = \det A$ (テキスト 53 ページ，補題 3.10；次回以降)
- 正方行列を列ベクトルに分解して $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ ($\boldsymbol{a}_j$ はそれぞれ m 次列ベクトル) のように表すとき，

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = c\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$$
$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_m).$$

  (テキスト 63 ページ，定理 3.12).
- 上と同様のことが，行ベクトルに分解した場合にも言える（テキスト 55 ページ，定理 3.2).
- 列（行）を入れ替えると行列式の符号は変わる（定理 3.3, 3.13）
- ある列（行）に別の列（行）のスカラ倍を加えても行列式の値は変わらない (定理 3.5, 3.12).
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ (定理 3.8; 次回もう一度)

以上のことから

定理 7.3. 正方行列 A が正則であるための必要十分条件は，$\det A \neq 0$ となることである.

問題

7-1 テキスト 75 ページ，3.1, 3.2, 3.3, 3.4

7-2 テキスト 75–76 ページ，3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11.

7-3
- n 次の行列式の定義式の中に含まれる乗算は $(n-1) \times n!$ 個である.
- 1 秒間に 10^{15} 回の乗算ができる (10^3 TFLOPS) 計算機で，上の回数の計算を行うと，どれくらい時間がかかるか，$n = 10$, $n = 20$, $n = 100$ の場合に計算しなさい．ただし

$$10! \fallingdotseq 3.63 \times 10^6, \qquad 20! \fallingdotseq 2.43 \times 10^{18}, \qquad 100! \fallingdotseq 9.33 \times 10^{157}.$$

8　行列式 (2)

■順列の符号

- $(1, 2, \ldots, n)$ のうち 2 つの数を入れ替えて得られる順列の転倒数は奇数である．したがって，順列の符号は -1.
- 順列 $(p_1, \ldots, p_n)$ の 2 つの数を入れ替えて得られる順列の転倒数は，もとの順列の転倒数から奇数だけ増える．したがって，順列の符号が変わる．

■行基本変形と行列式 (前回の復習)

- 2 つの行を入れ替えると，行列式の符号が替わる．
- ある行を c 倍すると行列式は c 倍になる．
- ある行のスカラ倍を他の行に加えても，行列式はかわらない．

■次数を落とす公式　テキスト 58 ページ，定理 3.6:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

このことから

- 上三角行列の行列式は対角成分の積

がわかる．

■積の行列式　テキスト 60 ページ，定理 3.8

$$\det(AB) = (\det A)(\det B). \tag{8.1}$$

このことから，

定理 8.1 (テキスト 61 ページ，定理 3.19)**.** 正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ となること．とくに，そのとき $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

■転置の行列式　テキスト 60 ページ，定理 3.11:

$$\det({}^tA) = \det A.$$

このことから，行列式の行に関する性質はすべて列に関する性質に置き換えることができる：

- 2 つの列を入れ替えると，行列式の符号が替わる．
- ある列を c 倍すると行列式は c 倍になる．

2012 年 6 月 7 日 (2012 年 6 月 7 日訂正)

- ある列のスカラ倍を他の列に加えても，行列式はかわらない．

これらの変形を“列基本変形”という．

さらに，下三角行列の転置は上三角行列となるので，

- 下三角行列の行列式は対角成分の積である．

問題

8-1 式 (8.1) の左辺と右辺の積の積の意味の違いを述べなさい．

8-2 n 次正則行列 P と n 次正方行列 A に対して A と $P^{-1}AP$ は一般に等しくない．このことを確かめた上で，

$$\det(P^{-1}AP) = \det A, \qquad \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

であることを示しなさい．

8-3 実数を成分とする正方行列 A が**直交行列** an orthogonal matrix であるとは，${}^tAA = I$ となることである．直交行列の行列式は 1, -1 のいずれかであることを示しなさい．さらに，行列式が 1 (-1) である直交行列は，実数 θ を用いて

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\right)$$

と書けることを示しなさい．これらの行列が定める座標平面の 1 次変換はどんな意味があるか．

8-4 複素数を成分とする行列 $A = [a_{ij}]$ に対して $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ ($\overline{x}$ は x の共役複素数）と定める．さらに $A^* := \overline{{}^tA}$ を A の**随伴行列** the adjoint matrix という．複素数を成分とする正方行列 A が**ユニタリ行列** a unitary matrix であるとは，$A^*A = I$ が成り立つことである．ユニタリ行列の行列式はどのような値をとりうるか．

8-5 行列

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

に対して $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I$ を求めなさい．

9　余因子と行列式の展開

今回は $A, B, \ldots$ で n 次正方行列 $(n \geqq 2)$ を表す.

■行列式の性質 (復習)

- 行列 A の一つの行 (列) を一斉に c 倍すると，行列式は c 倍になる.
  (テキスト 57 ページ，定理 3.5 (R1); テキスト 64 ページ，定理 3.15 (C1)).
  ($\Rightarrow$ 一つの行 (列) がすべて 0 である行列の行列式は 0).
- 行列 A の 2 つの行 (列) を入れ替えると，行列式は (-1) 倍になる.
  (テキスト 57 ページ，定理 3.5 (R2); テキスト 64 ページ，定理 3.15 (C2)).
  ($\Rightarrow$ 2 つの行 (列) が一致する行列の行列式は 0).
- 行列 A のある行 (列) に他の行 (列) のスカラ倍を加えても行列式の値はかわらない.
  (テキスト 57 ページ，定理 3.5 (R2); テキスト 64 ページ，定理 3.15 (C2)).
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 個の n 次列ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を n 次列ベクトルとするとき,

$$\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n] + \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n].$$

  (テキスト 63 ページ，定理 3.12 (2)).
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 個の n 次行ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を n 次行ベクトルとするとき,

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

  (テキスト 55 ページ，定理 3.2 (1)).
- (テキスト 58 ページ，定理 3.6; 64 ページ，定理 3.16)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

  ($\Rightarrow$ 上 (下) 三角行列の行列式は対角成分の積, とくに対角行列の行列式は対角成分の積.)
- $\det({}^tA) = \det A$ (テキスト 62 ページ，定理 3.11)
  ($\Rightarrow \det(A^*) = \overline{\det A}$, 中間試験 問題 C (7)).
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ (テキスト 60 ページ，定理 3.8)
- A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$. (テキスト 61 ページ，定理 3.9)

2012 年 6 月 21 日 (2012 年 6 月 28 日訂正)

■例題　以下，A, B, C, D を n 次正方行列とする：

$$\det\begin{bmatrix} I & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det D, \qquad \det\begin{bmatrix} A & B \\ O & I \end{bmatrix} = \det A, \qquad \det\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = (\det A)(\det D).$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B), \qquad \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

ただし，最後の等式では A は正則とする．

■余因子と余因子行列　n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det\,[A \text{ の } i \text{ 行と } j \text{ 列をのぞいてできる } (n-1) \text{ 次正方行列}]$$

を A の (i,j) **余因子** cofactor という (テキスト 67 ページ)．さらに

$$\widetilde{A} = {}^t[\tilde{a}_{ij}] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

すなわち，A の余因子を並べて**転置をとった**行列を A の**余因子行列** cofactor matrix という．(テキスト 69 ページ).

■余因子展開

定理 9.1 (テキスト 67 ページ, 定理 3.18)**.** n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の (i,j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と書くと，各 l $(1 \leqq l \leqq n)$ に対して

$$\det A = a_{l1}\tilde{a}_{l1} + \dots + a_{ln}\tilde{a}_{ln} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\tilde{a}_{lk},$$

$$\det A = a_{1l}\tilde{a}_{1l} + \dots + a_{nl}\tilde{a}_{nl} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl}\tilde{a}_{kl}$$

が成り立つ．

系 9.2 (テキスト 68 ページ, 定理 3.19)**.** n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の (i,j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と書くと，各 l, m $(1 \leqq l, m \leqq n)$ に対して

$$a_{l1}\tilde{a}_{m1} + \dots + a_{ln}\tilde{a}_{mn} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\tilde{a}_{mk} = \delta_{lm}\det A,$$

$$a_{1l}\tilde{a}_{1m} + \dots + a_{nl}\tilde{a}_{nm} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl}\tilde{a}_{km} = \delta_{lm}\det A$$

が成り立つ．ただし δ_{lm} はクロネッカーのデルタ記号である．

系 9.3 (テキスト 69 ページ)**.** 正方行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)I$$

を満たす．

問題

9-1 2 次のユニタリ行列で，行列式が $e^{i\theta}$ (θ は実数) となるものをすべてあげなさい．

9-2 2 次正方行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は $\widetilde{A} = (\operatorname{tr} A)I - A$ で与えられる．

9-3 各成分 $a_{ij}(t)$ が t の微分可能な関数であるような正方行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]$ に対して

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \operatorname{tr}\left(\widetilde{A}(t)\frac{dA(t)}{dt}\right).$$

9-4 二つの 3 次列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right)$$

で定まる列ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積** outer product または **ベクトル積** vector product という．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と書くとき，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して次が成り立つことを確かめなさい：

- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0, \qquad \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0.$
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.
- $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.
- $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$.
- 一般に $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ と $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ は等しくない．

9-5 $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2, b_3]$ に対して $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle := -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と定める．平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$, $\langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい．（ヒント：上の問いの結果を少しもじる).

9-6 テキスト 75 ページ 3.5, 77 ページ 3.17. その他行列式の計算もろもろ．

10　余因子と行列式の展開 (つづき)

■余因子と余因子行列 (復習)　n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ $(n \geqq 2)$ に対して

$$A\ \text{の}\ (i,j)\text{-余因子}:\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}\det[A\ \text{の}\ i\ \text{行と}\ j\ \text{列をのぞいてできる}\ (n-1)\ \text{次正方行列}]$$

$$A\ \text{の余因子行列}:\widetilde{A} := {}^t[\tilde{a}_{ij}] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

定理 10.1 (定理 3.18/3.19)**.** 上の記号のもと，各 l $(1 \leqq l, m \leqq n)$ に対して

$$a_{l1}\tilde{a}_{m1} + \cdots + a_{ln}\tilde{a}_{mn} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\tilde{a}_{mk} = \delta_{lm}(\det A),$$

$$a_{1l}\tilde{a}_{1m} + \cdots + a_{nl}\tilde{a}_{nm} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl}\tilde{a}_{km} = \delta_{lm}(\det A)$$

系 10.2 (テキスト 69 ページ)**.** 正方行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)I$$

を満たす.

定理 10.3. n 次正方行列 A $(n \geqq 2)$ が正則である必要十分条件は $\det A \neq 0$ となることである．このとき，

$$(\star)\qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$$

と表される.

証明. A が正則ならば $AB = I$ となる行列 B $(= A^{-1})$ が存在するので，両辺の行列式をとれば $(\det A)(\det B) = 1$．したがって $\det A \neq 0$.

逆に $\det A \neq 0$ のとき $(\star)$ の右辺を B と書けば,

$$AB = \frac{1}{\det A}A\widetilde{A} = \frac{1}{\det A}(\det A)I = I, \qquad BA = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}A = I.$$

したがって $AB = BA = I$ となるので，とくに A は正則で B が A の逆行列である.　□

定理 10.4 (Cramer の公式; テキスト 70 ページ，定理 3.21)**.** n 次正方行列行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$ $(n \geqq 2)$ が正則であるとき，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n)$$

の唯一の解は $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ である．ただし

$$x_1 = \frac{\det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n]}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \dots, \boldsymbol{a}_n]}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{b}]}{\det A}.$$

注意 10.5. 一般に，定理 10.3, 10.4 を逆行列を求めたり連立 1 次方程式を具体的に解いたりするために使うことはほとんどない．理由は講義資料 7 の問題 7-3 を参照せよ．これらはむしろ理論上重要である.

2012 年 6 月 28 日 (2012 年 7 月 5 日訂正)

■2 次・3 次の行列式の図形的な意味

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \varepsilon S$ である．ただし S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の面積,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & (\boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{a} \text{ に対して左側をさす}) \\ -1 & (\boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{a} \text{ に対して右側をさす}) \end{cases}$$

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \varepsilon V$$

  である．ただし V は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を 3 辺にもつ平行六面体の面積,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ は右手系}) \\ -1 & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ は左手系}) \end{cases}$$

(テキスト 71 ページ以降)

問題

10-1 (1) テキスト 77 ページ，3.16.

(2) n 次正方行列 A $(n \geqq 2)$ の階数が r であるとき，その余因子行列 $\widetilde{A}$ の階数を求めなさい.

10-2 関係式

$$\begin{cases} x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) - 2x_4(t) = t \\ x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) + 3x_4(t) = 1 \\ 3x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2x_4(t) = -1 \\ 2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) = 0 \end{cases}$$

を満たす t の関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ の導関数を求めなさい.

10-3 テキスト 77 ページ，3.20, 3.21.

11　一次独立・従属

■数ベクトル空間　実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書くとき，正の整数 n にたいして

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

を $\mathbb{R}$ 上の n **次元数ベクトル空間**という（テキスト 80 ページ）[*19][*20].

■一次結合（線形結合）　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とスカラ $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ に対して

$$(*) \qquad c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$$

を $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ の**一次結合** a linear combination という (テキスト 80 ページ)[*21]．行列の積を用いて $(*)$ を

$$[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

と表すことができる.

例 11.1. $\mathbb{R}^2$ の任意の要素は $\boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0]$ と $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[0, 1]$ の一次結合で表すことができる：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.$$

■一次独立・一次従属

定義 11.2 (テキスト 62 ページ)**.** ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が**一次独立** (線形独立; linearly independent) であるとは,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$$

を満たす $c_1, \dots, c_r$ が $(c_1, \dots, c_r) = (0, \dots, 0)$ に限ることである．一次独立でないベクトルの組は**一次従属** linearly dependent である，という.

例 11.3. $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[0, 1]$ は一次独立である．実際,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{o} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (c_1, c_2) = (0, 0).$$

また，任意の $\boldsymbol{v} = {}^t[x, y]$ に対して，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}$ は一次従属.

2012 年 7 月 5 日 (2012 年 7 月 5 日訂正)

[*19] $\mathbb{R}^n$ の要素，すなわち n 次列ベクトルを単に**ベクトル**と呼ぶことがある.

[*20] これから 3 回の講義で扱う内容は $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ にとりかえてもそのまま成立する．$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の違いがはっきりとあらわれるのは，後期に内積を扱うあたりから.

[*21] “線形結合” ということもある．“一次” も “線形” も “linear” の訳語なので，多くの場合置き換え可能.

■一次独立性の判定

命題 11.4 (テキスト 82 ページ)**.** ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次独立（従属）であるための必要十分条件は,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \qquad A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]$$

が自明な解しかもたない（非自明な解をもつ）ことである.

命題 11.5 (テキスト 83 ページ)**.** n 個の $\mathbb{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は同次連立一次方程式

$$\det A \neq 0 \qquad A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]$$

となることである.

問題

11-1 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次従属であるための必要十分条件を “一次独立” という言葉を用いずに表しなさい. (問題が多少曖昧：一次独立でない, が定義だが, これでは一次従属性を具体的に判定するのに不便).

11-2 ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次独立（従属）ならば,

$$[\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r] = P[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] \qquad (P \text{ は } n \text{ 次正則行列})$$

で与えられるベクトル $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r \in \mathbb{R}^n$ も一次独立 (従属) である.

11-3 ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次独立（従属）ならば,

$$[\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r] = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]Q \qquad (Q \text{ は } r \text{ 次正則行列})$$

で与えられるベクトル $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r \in \mathbb{R}^n$ も一次独立 (従属) である.

11-4 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k]$ の階数は, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ から選べる一次独立なベクトルの組の最大個数である.

11-5 テキスト 110 ページ 4.1, 4.2; テキスト 112 ページ 4.11, 4.12; テキスト 113 ページ 4.21, 4.22.

12 部分空間

■集合の用語の復習 数学的対象の集まりを**集合** a set という．集合を構成している一つ一つのメンバーをその集合の**要素** an element, a member という．対象 x が集合 X の要素であるときに $x \in X$ と書く．集合 X に対して $x \in X$ または $x \notin X$ のいずれか一方が成り立つ．とくに要素をひとつも持たない集合を**空集合** the empty set といい，$\emptyset$ と書く[*22]．任意の x に対して $x \notin \emptyset$ である．

集合 Y のすべての要素が集合 X の要素となっているとき，Y は X の**部分集合** a subset であるといって，$Y \subset X$ と書く[*23]：

$$Y \subset X \qquad \Leftrightarrow \qquad (y \in Y \quad \text{ならば} \quad y \in X).$$

空集合は任意の集合の部分集合とする：$\emptyset \subset X$.

2 つの集合 X, Y に対して，

$$X = Y \qquad \Leftrightarrow \qquad (X \subset Y \quad \text{and} \quad Y \subset X)$$

である．

集合 X の部分集合 W_1, W_2 に対して，X の部分集合

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in X \,|\, x \in W_1 \text{ and } x \in W_2\}, \qquad W_1 \cup W_2 = \{x \in X \,|\, x \in W_1 \text{ or } x \in W_2\}$$

をそれぞれ W_1, W_2 の**共通部分** the intersection, **合併集合** the union という．

■部分空間 以下，正の整数 n に対して

$$\mathbb{R}^n = \{{}^t[x_1, \dots, x_n] \,|\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

すなわち，n 次元数ベクトル空間をとり，その部分集合を考える．

定義 12.1 (テキスト 84 ページ)**.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が $\mathbb{R}^n$ の**部分空間** a subspace または**線形部分空間** a linear subspace であるとは，

- $\boldsymbol{o} \in W$,
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$,
- $\boldsymbol{a} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ ならば $k\boldsymbol{a} \in W$

が成り立つことである．

例 12.2. $\mathbb{R}^2$ の部分空間を全て求めよう．テキスト 85 ページの例 12 でみるように $\{\boldsymbol{o}\}$，$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である (自明な部分空間)．$W \subset \mathbb{R}^2$ を $\{\boldsymbol{o}\}, \mathbb{R}^2$ ではない部分空間とする．$W \neq \{\boldsymbol{o}\}$ なのだから，$\boldsymbol{a} \in W$ で $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ となるものが存在する．すると，部分空間の定義から，

$$\{t\boldsymbol{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset W$$

2012 年 7 月 12 日

[*22] ϕ と書くこともある．

[*23] 高等学校の教科書などでは，このことを $Y \subseteq X$ と書くことが多いようだが，このように $Y \subset X$ と書く方が多数派のように見える．この記号に従えば $X \subset X$ である．

となることがわかる．いま $\boldsymbol{b}\in W$ で $U:=\{t\boldsymbol{a}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ の要素でないものが存在したとする．すると，部分空間の定義から

$$\{t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}\,|\,s,t\in\mathbb{R}\}\subset W$$

であることがわかる．ここで，$(t,s)\neq(0,0)$ となる s,t に対して $t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{b}\in U$ となってしまい $\boldsymbol{b}\notin U$ に反するので $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は1次独立でなければならない．すると，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の1次結合で表される．（実際，行列 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ は正則なので連立方程式 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}$ をとけばよい．）したがって

$$\text{任意の } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \text{ に対して } \boldsymbol{x}\in\{t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}\,|\,s,t\in\mathbb{R}\}\subset W;\qquad \text{したがって } \mathbb{R}^2\subset W.$$

ここで $W\subset\mathbb{R}^2$ であったから $W=\mathbb{R}^2$ となり，$W\neq\mathbb{R}^2$ と仮定したことに矛盾する．すなわち $\{t\boldsymbol{a}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ の要素でない W の要素は存在しない．すなわち $W=\{t\boldsymbol{a}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ が成り立つ．

以上から $\mathbb{R}^2$ の部分空間で非自明なものは，零ベクトルでない $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2$ を用いて

$$W=\{t\boldsymbol{a}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

と書ける．逆にこの形のものが部分空間であることはすぐにわかる（確かめよ）．

■部分空間の表示 (1)　ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\langle\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r\rangle:=\{c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r\}\subset\mathbb{R}^n \tag{12.1}$$

とおくと，この集合は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる (テキスト 86 ページ)．式 (12.1) の左辺を $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ が**生成する** (**張る**) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 the subset of $\mathbb{R}^n$ generated (spanned) by $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ という．

例 12.3. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1={}^t[1,0,1]$, $\boldsymbol{a}_2={}^t[0,1,1]$ に対して $W:=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$ とおく．

- W の要素を挙げてみよう．$\boldsymbol{a}_1=1\boldsymbol{a}_1+0\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2$ は W の要素である．$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2={}^t[1,1,2]$, $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2{}^t[1,-1,0]$ も W の要素である．
- $\boldsymbol{b}={}^t[2,3,1]$ は W の要素であるかどうかを確かめよう．$\boldsymbol{b}\in W$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2$ をみたすスカラ c_1, c_2 が存在することである．すなわち連立一次方程式

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

  が解を持てばよい．実際，この方程式は解をもたないので $\boldsymbol{b}\notin W$.

■部分空間の表示 (2)　$r\times n$ 型行列 A に対して

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\}\subset\mathbb{R}^n$$

を，同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の**解空間**という．これが $\mathbb{R}^n$ の部分空間になることは容易に示すことができる（テキスト 88 ページ)．

例 12.4. 行列

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\2&1&1&1\\-1&-2&1&-1\end{bmatrix}$$

に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間 $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$ を考える．

- $\boldsymbol{a} = {}^t[1, 1, 0, 3] \in W$ である．実際，$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ が成り立っている．
- W の要素をいくつか挙げてみよう．連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は

$$\left\{ c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

であるから，この集合は W と一致する．すなわち $W = \langle {}^t[-1, 1, 1, 0], {}^t[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1] \rangle$ となるので，前の例と同様に要素をたくさん挙げることができる．

問題

12-1 次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合の要素を（あれば）3 つあげなさい．また，$\mathbb{R}^3$ の要素で，それらの集合の要素でないものを 3 つあげなさい．さらに，それらが $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているか調べなさい．

(1) $\emptyset$

(2) $\left\{ {}^t[x_1, x_2, x_3] \,;\, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = a \right\}$ （a は定数）

(3) $\{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \,|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ $\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(4) $\left\{ {}^t[x_1, x_2, x_3] \,|\, (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = a \right\}$. ただし a は実数の定数.

12-2 テキスト 84–85 ページの例 8 から 12 を確かめなさい.

12-3 テキスト 111 ページ, 4.3, 4.4, 112 ページ 4.13.

12-4 $\mathbb{R}^n$ の部分空間の要素の個数は 1 個でなければ無限個である．

12-5 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W_1, W_2 の共通部分は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

12-6 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W_1, W_2 に対して

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \,|\, \boldsymbol{a}_1 \in W_1, \boldsymbol{a}_2 \in W_2\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間で，さらに $W_1 \cap W_2 \subset W_1 + W_2$ が成り立つ．等号が成り立つのはどういうときか.

12-7 $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1, 1, 0, 1]$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t[1, 1, 1, -1]$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t[1, 0, 1, 1]$ に対して，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ を同次連立一次方程式の解空間の形で表しなさい.

13　部分空間の基底と次元

テキスト 4.4 節はかなり盛りだくさんだが，今回は時間の都合で部分空間の「次元」を「基底」という概念を用いて定義する，というところまでにしておこう．

■復習　$\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ に対して

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が**一次独立**であるとは，「$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ ならば $(c_1, \ldots, c_r) = (0, \ldots, 0)$」が成り立つことである．
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が**生成する** $\mathbb{R}^n$ の部分空間とは $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle := \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r \mid c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}\}$ のことである．

■基底　$\mathbb{R}^n$ の部分空間 W 上のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が W の**基底** a basis であるとは

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立，かつ
- $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$

が成り立つことである．

例 13.1. $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots \qquad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

の組 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底** the canonical basis of $\mathbb{R}^n$ という．

例 13.2. $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるための必要十分条件は $\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \neq 0$ となることである．

実際，$\{\boldsymbol{a}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底ならば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立だから，$\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \neq 0$ が成り立つ．

逆に $\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \neq 0$ が成り立っているならば，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立なので $\mathbb{R}^n = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ であることを示せばよい．実際, 正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ は正則だから，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{c}$ が存在する．とくに $\boldsymbol{c} = {}^t[c_1, \ldots, c_n]$ と書けば $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ となり $\mathbb{R}^n \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ が分かる．定義より $\mathbb{R}^n \supset \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ なので結論を得る．

一般に，$\mathbb{R}^n$ の部分空間の基底は無数にある：For a given subspace W of $\mathbb{R}^n$, there are infinitely many bases of W[*24].

次の事実の詳細は後期に扱う．

事実 13.3. $\mathbb{R}^n$ の $\{\boldsymbol{o}\}$ でない任意の部分空間には基底が存在する．

2012 年 7 月 17 日

[*24] 単数，複数に注意．基底 a basis は単数形．$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ を集合と見なして一つのものと考える．基底とはベクトルの組の属性であって，その一つ一つのベクトルの属性ではない．基底 basis の複数形は bases.

定理 13.4. 部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ が与えられているとき，W の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \qquad (x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R})$$

の形にただひと通りに (一意的に) 表される．

証明. W は $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ で生成されるから，$\boldsymbol{x} \in W$ はそれらの一次結合で表される．さらに

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r = y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_r\boldsymbol{a}_r$$

と表されるならば $(x_1 - y_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_r - y_r)\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$．ここで $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立だから $x_1 - y_1 = \cdots = x_r - y_r = 0$．すなわち，$x_j = y_j$ $(j = 1, \dots, r)$ が成り立つから，結論の形の表し方はひと通り． □

例 13.5. $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1, 0, 1]$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t[1, 1, 1]$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t[0, 1, 1]$ とすると $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える (確かめよ)．そこで，与えられたベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t[2, -1, 3]$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で表そう．

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \qquad A := [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく．これを c_1, c_2, c_3 に関する連立一次方程式とみなせば $c_1 = 4$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$．したがって

$$\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3.$$

■基底を構成するベクトルの個数　ここでは次の定理を示す：

定理 13.6. 部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ の基底を構成するベクトルの個数は基底のとりかたによらず一定である．

これを示すためにいくつか準備をしておこう：次は，行列の基本変形の性質による：

補題 13.7. $s \times n$ 型の行列 B の階数は s, n 以下である：$\operatorname{rank} B \leqq \min\{s, n\}$.

証明. B が行基本変形により階段行列 C に変形できたとすると，ある s 次正則行列 P が存在して $PB = C$ の形に書ける．C は $s \times n$ 型行列で，その $\vec{o}$ でない行の個数が $\operatorname{rank} B$ だから $\operatorname{rank} B \leqq s$．また，階段行列の $\boldsymbol{o}$ でない各行の左側の 0 の並びの長さは，一行下がるたびに 1 以上増えるから，C が $s \times n$ 型であることに注意すると $\operatorname{rank} B \leqq n$. □

連立一次方程式の掃き出し法による解法から，次のことがわかる．きちんと証明しようとすると記述が面倒くさいが，“$\mathbb{R}^n$ のベクトルを未知関数とする同次連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は $n - \operatorname{rank} B$ 個の任意定数を含む” という事実をよく見れば，その任意定数を係数とするベクトルが一次独立になることがわかる．

補題 13.8 (同次連立 1 次方程式の解の表示)**.** $r \times n$ 型の行列 B に対して，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を未知数とする同次連立一次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間は，ある一次独立な s 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s$ により生成される．ただし $s = n - \operatorname{rank} B$．とくに，この方程式が自明な解 $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o})$ しか持たないための必要十分条件は $n - \operatorname{rank} B = 0$.

補題 13.9. $s \times r$ 型行列 A と $r \times s$ 型行列 B が $BA = I$ (I は r 次単位行列) を満たしているならば $\operatorname{rank} B \geqq r$ が成り立つ．

証明. B が行基本変形により階段行列 C に変形されたとすると，$PB = C$ となる r 次正則行列 P が存在する．もし $\operatorname{rank} B < r$ ならば，C の第 r 行の成分はすべて 0 なので DA の第 r 行の成分も全て 0．ここで仮

定から $DA = P^{-1}BA = P^{-1}I = P^{-1}$ なので，正則行列 P^{-1} の第 r 行はすべて 0．これは P^{-1} の正則性に矛盾しているので $\operatorname{rank} B \geqq r$ でなければばならない． □

以上から，次がわかる：

命題 13.10. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が与えられているとする．このとき

(1) $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s \in W$ が一次独立ならば $s \leqq r$ である．
(2) $W = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s \rangle$ ならば $s \geqq r$ である．

証明. (1): W は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ で生成されているから，各 j に対して $\boldsymbol{b}_j = b_{1j}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{rj}\boldsymbol{a}_r$ $(b_{lj} \in \mathbb{R})$ と表すことができる．これを行列で表すと，

$$(*) \qquad [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s] = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]B, \qquad B = [b_{ij}]_{1 \leqq i \leqq r; 1 \leqq j \leqq s}$$

と書ける．すると $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ の一次独立性から

$$\begin{aligned} & c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \qquad \left(\boldsymbol{c} = {}^t[c_1, \ldots, c_s]\right) \\ \Leftrightarrow \quad & [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad d_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \qquad \left(B\boldsymbol{c} = {}^t[d_1, \ldots, d_r]\right) \\ \Leftrightarrow \quad & d_1 = \cdots = d_r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}. \end{aligned}$$

したがって $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ が一次独立であるための必要十分条件は，未知ベクトル $\boldsymbol{c}$ に関する連立一次方程式 $B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ が自明な解しかもたないことである．したがって補題 13.8 から $\operatorname{rank} B = s$．ところが補題 13.7 から $\operatorname{rank} B \leqq \min\{r, s\} \leqq r$ であるから，$s \leqq r$．

(2): W が $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ で生成されるから，各 m に対して $\boldsymbol{a}_m = \alpha_{1m}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_{sm}\boldsymbol{b}_s$ $(\alpha_{jm} \in \mathbb{R})$，すなわち

$$[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s]A, \qquad A = [\alpha_{lm}]_{1 \leqq l \leqq s; 1 \leqq m \leqq r}$$

と書ける．一方, W は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ でも生成されているから $(*)$ も成り立っている．これらから $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = BA[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]$ が成り立つが，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立だから，$BA = I$ (I は r 次単位行列) が成り立つ（なぜか）．したがって，補題 13.9 より $\operatorname{rank} B \geqq r$．ところが補題 13.7 から $\operatorname{rank} B \leqq \min\{r, s\} \leqq s$ であるから， r $\leqq s$． □

このことから定理 13.6 は従う．

■次元

定義 13.11. $\mathbb{R}^n$ の $\{\boldsymbol{o}\}$ 部分空間 W の基底を構成するベクトルの個数を W の**次元** dimension といい，$\dim W$ と書く．また $\dim\{\boldsymbol{o}\} = 0$ と定める．

例 13.12. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

問題

13-1 $\mathbb{R}^2$ の 1 次元部分空間をすべてあげなさい．
13-2 テキスト 91 ページ問 12.
13-3 テキスト 111 ページ 4.4, 4.5, 4.6; 112 ページ 4.15.