2012 年 10 月 4 日 (2012 年 10 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 1

お知らせ

- 今回は最初の時間ですので，別紙の講義概要を読んでおいてください．
- 名簿整理の都合上，今回は提出物を**必ず**出してください．

1　ベクトル空間

1.1　ベクトル空間

定義 1.1 (テキスト 115 ページ)**.** 集合 V が**ベクトル空間** または**線形空間** a vector space であるとは，

- V の各要素 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ に対して V の要素 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ を対応させる規則 (加法)
- V の各要素 $\boldsymbol{v}$ と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して V の要素 $\lambda\boldsymbol{v}$ を対応させる規則 (スカラ倍)

が定められていて，それらが次の性質を満たすことである：

(1) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ に対して $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ が成り立つ．
(2) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ が成り立つ．
(3) 次を満たす V の要素 $\boldsymbol{o}$ が存在する：任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{v}$. $\boldsymbol{o}$ を V の**零ベクトル**という．
(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$ となる $\boldsymbol{w} \in V$ が存在する．（この $\boldsymbol{w}$ を $-\boldsymbol{v}$ と書き $\boldsymbol{v}$ の**逆ベクトル** という．）
(5) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$.
(6) 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ と $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $(\lambda+\mu)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u}$.
(7) 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ と $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $(\lambda\mu)\boldsymbol{u} = \lambda(\mu\boldsymbol{u})$.
(8) 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

注意 1.2.
- すなわち，ベクトル空間とは「加法とスカラ倍が定義されて，然るべき性質を満たす」ような集合のことである．
- ここでは「スカラ」を実数としたが，$\mathbb{R}$ の代わりに $\mathbb{C}$ (複素数全体の集合) の要素をスカラとみなすこともある．何をスカラとしているかを明確にしたい場合：定義 1.1 の性質をもつ V を「$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間」a vector space over $\mathbb{R}$, または「実ベクトル空間」定義 1.1 の $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に置き換えた性質をもつ V を「$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間」a vector space over $\mathbb{C}$, 「複素ベクトル空間」という．
- さらに，スカラの範囲は一般化することができる．すなわち「加減乗除ができるような集合」であれば，それをスカラとするベクトル空間を考えることができる．この「加減乗除ができるような集合」のことを**体（たい）** a field という．

2012 年 10 月 4 日 (2012 年 10 月 11 日訂正)

1.2 ベクトル空間の例

例 1.3 (数ベクトル空間)**.** 正の整数 n に対して $\mathbb{R}^n := \{{}^t[x_1, \dots, x_n] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ とする．$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \dots, x_n]$, $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := {}^t[x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n], \qquad \lambda\boldsymbol{x} := {}^t[\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]$$

と定める．さらに

$$\boldsymbol{o} := {}^t[0, \dots, 0], \qquad -\boldsymbol{x} := (-1)\boldsymbol{x} = {}^t[-x_1, \dots, -x_n]$$

と定めると，これらは定義 1.1 の性質を満たす．このようにして定まるベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を (実係数の) n **次元数ベクトル空間**という．

例 1.4. 正の整数 m, n に対して，実数を成分とする $m \times n$ 型行列全体の集合を $\mathrm{M}(m, n)$ と表す．$\mathrm{M}(m, n)$ に適切に加法とスカラ倍を定義すれば，これはベクトル空間となる．

例 1.5. 実数を成分とする（無限）数列全体の集合を $\mathcal{S}$ と書くことにする．$\mathcal{S}$ の要素とは，数列

$$\{a_j\}_{j=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, a_2, \dots,\} \qquad (a_j \in \mathbb{R})$$

のことである．$\boldsymbol{x} = \{x_j\} =_{j=0}^{\infty}= \{x_0, x_1, \dots\}$, $\boldsymbol{y} = \{y_j\} =_{j=0}^{\infty}= \{y_0, y_1, \dots\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := \{x_j + y_j\}_{j=0}^{\infty} = \{x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots\}, \qquad \lambda\boldsymbol{x} := \{\lambda x_j\}_{j=0}^{\infty} = \{\lambda x_0, \lambda x_1, \dots\}$$

と定めることで $\mathcal{S}$ はベクトル空間となる．とくに零ベクトルは

$$\boldsymbol{o} = \{0\}_{j=0}^{\infty} = \{0, 0, \dots\}$$

である．

例 1.6. 一般に，集合 X, Y が与えられたとき[*1]，X の各要素 x に対して Y の要素 $f(x)$ を対応させる規則 f を X **から** Y **への写像** a map from X to Y という．“f は X から Y への写像である”, “f は $x \in X$ を $f(x) \in Y$ に対応させる” ということをそれぞれ

$$f\colon X \longrightarrow Y, \qquad f\colon X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$$

と書く[*2]．とくに Y が $\mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) のときには，$f\colon X \to \mathbb{R}$ ($f\colon X \to \mathbb{C}$) を “X 上の実数値 (複素数値) 関数” a real-valued (complex-valued) function on X という．

ここでは，以下 X 上の実数値関数全体の集合を $\mathcal{F}(X)$ と書くことにする．$\mathcal{F}(X)$ の一つの要素 f は「X の各要素に実数 $f(x)$ を対応させる対応の規則」だから，$f \in \mathcal{F}(X)$ を指定するには，各 $x \in X$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$ を指定してやればよい．たとえば，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f\colon \mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$$

と定めると，$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ となる．

[*1] 簡単のため空集合でないとする．
[*2] 矢印の形に注意

ふたつの関数 $f,\, g \in \mathcal{F}(X)$ が**等しい**とは，すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つ，すなわち $f(x) = g(x)$ が x の**恒等式**となることである．

空でない集合 X をひとつとり，$f, g \in \mathcal{F}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$f + g\colon X \ni x \longmapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x) \in \mathbb{R}, \qquad \lambda f\colon X \ni x \longmapsto (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \in \mathbb{R}$$

とすると $f + g \in \mathcal{F}(X)$, $\lambda f \in \mathcal{F}(X)$ となる．これを加法とスカラ倍として $\mathcal{F}(X)$ はベクトル空間となることは容易にたしかめられる．とくに零ベクトルは

$$o(x) = 0 \qquad (x \in X)$$

すなわち，恒等的に 0 となる関数 o である．

注意 1.7.
- 正の整数 n に対して $N_n := \{1, 2, \dots, n\}$ とすると例 1.3 の $\mathbb{R}^n$ は $\mathcal{F}(N_n)$ と同一視できる．
- $\overline{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots, \}$ を負でない整数全体の集合とすると，例 1.5 の $\mathcal{S}$ は $\mathcal{F}(\overline{\mathbb{N}})$ と同一視できる．

1.3 部分空間

一般に，ベクトル空間 V の空でない部分集合 $W \subset V$ が

(1.1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W, \quad \lambda \boldsymbol{v} \in W$

を満たすならば，V の加法およびスカラ倍を W 上に限ることで，W はベクトル空間になる．

実際，定義 1.1 の (1), (2), (5)–(8) はもともと V で成り立っているのだから W 上でも成り立つ．また，V の零ベクトル $\boldsymbol{o}$ は，任意の $\boldsymbol{v} \in W$ に対して $\boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{v}$ を満たすので，$\boldsymbol{o} \in W$ となり，これを用いれば (3) が成り立つことがわかる．さらに $\boldsymbol{v} \in W$ に対して $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v} \in W$ とすれば (4) が成り立つ．

そこで (1.1) を満たす V の部分集合 W を V の**部分空間** subspace, **部分ベクトル空間**, **線形部分空間** linear subspace とよぶ.

例 1.8 (生成する部分空間（復習）)**.** ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_k$ の**１次結合**全体の集合

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k \rangle := \{\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

は V の部分空間となる．これを $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}$ が**生成する部分空間**という[*3]

例 1.9 (連立１次方程式の解空間（復習）)**.** 行列 $A \in \mathrm{M}(m, n)$ に対して，同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解

$$V_A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

例 1.10. 各項が実数であるような数列全体のなすベクトル空間 $\mathcal{S}$ (例 1.5 参照) に対して

$$\mathcal{S}_c := \left\{ \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{S} \,\middle|\, \{a_j\} \text{ は収束 converge する} \right\}$$

とおくと $\mathcal{S}_c$ は $\mathcal{S}$ の部分空間である．

[*3] 前期はとくに $V = \mathbb{R}^n$ の場合を考えたが，一般のベクトル空間でも同じことが成り立つ．

実際 $\boldsymbol{a} = \{a_j\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_j\} \in \mathcal{S}_c$ がそれぞれ α, β に収束するならば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{a_j + b_j\}$, $\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_j\}$ はそれぞれ $\alpha+\beta$, $\lambda\alpha$ に収束する（ということを解析学で学んだ）．したがって $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in \mathcal{S}_c$, $\lambda\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}_c$.

例 1.11. 数直線の区間 I に対して，例 1.6 で定めた $\mathcal{F}(I)$，すなわち I 上で定義された実数値関数全体のなすベクトル空間を考える．このとき

$$\mathcal{C}(I) := \left\{ f \in \mathcal{F}(I) | \, f \text{ は } I \text{ で連続} \right\}$$

は $\mathcal{F}(I)$ の部分空間である．

このことは，解析学で学ぶ「連続関数の和は連続」，「連続関数のスカラ倍は連続」という事実そのものである．

同様に，正の整数 r に対して

$$\mathcal{C}^r(I) := \{ f \in \mathcal{F}(I) \,|\, f \text{ は } I \text{ で } C^r\text{-級 } \}$$

は $\mathcal{F}(I)$ の部分空間である[*4]

例 1.12. 正の整数 k に対して

$$\mathcal{P}^k := \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f(x) \text{ は高々 } k \text{ 次の多項式 } x \}$$

とする．すなわち $\mathcal{P}^k$ は高々（たかだか） k 次の多項式全体の集合 (the set of polynomials of degree at most k) である．このとき $\mathcal{P}^k$ は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間である．

例 1.13. 実数の定数 α, β に対して微分方程式

$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) = 0 \tag{1.2}$$

を考える．このとき

$$V_{\alpha,\beta} := \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ は 2 回微分可能で (1.2) を満たす} \right\} \tag{1.3}$$

は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間である．

1.4 1次独立性

ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が**1次独立** linearly independent であるとは，

スカラ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が　$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{o}$　を満たすならば　$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$　が成り立つ

ことである．また $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が 1 次独立でないとき**1次従属** linearly dependent という．ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が 1 次従属であるための必要十分条件は，

$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{o}$　を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ で $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ となるものが存在する

ことである．

[*4] 関数 f が C^r-級である，ということの定義を思い出しなさい．

例 1.14. $\mathbb{R}^n$ の k 個の要素 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立であるための必要十分条件は，$n\times k$-行列 $A=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k]$ の階数が k となることである．

行列 A を，行基本変形によって階段行列 B に変形できたとすると，n 次の正則行列 C を用いて $A=CB$ と書ける．ここで

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{o} \quad\Leftrightarrow\quad A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad B\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

であるが，B は $n\times k$ の階段行列でその階数が k なので (1) $k\leqq n$，(2) B の上から k 行は k 次の単位行列となる．したがって，$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件は $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$.

例 1.15. 負でない整数 k に対して，例 1.5 の $\mathcal{S}$ の要素 $\boldsymbol{a}_k$ を

$$\boldsymbol{a}_k := [\text{第 } k \text{ 項が } 1 \text{ でそれ以外の項は } 0 \text{ であるような数列}] = \{\delta_{jk}\}_{j=0}^{\infty}$$

と定める．すると，正の整数 n に対して $\boldsymbol{a}_0,\dots,\boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立である．

実際

$$\lambda_0\boldsymbol{a}_0+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\{\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,0,0,\dots\}$$

であるが，右辺の数列が $\boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件は $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.

例 1.16. 例 1.6 の $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の要素 $f_0, f_1, \dots$ を

$$f_0(x):=1, \qquad f_1(x):=x, \quad \dots \quad , f_k(x):=x^k$$

で定める．このとき，正の整数 n に対して $f_0,\dots,f_n$ は 1 次独立である．

実際，スカラ $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ に対して

$$\begin{aligned}\lambda_0f_0+\cdots+\lambda_nf_n=o \quad&\Leftrightarrow\quad (\lambda_0f_0+\cdots+\lambda_nf_n)(x)=o(x) \quad \text{がすべての } x \text{ に対して成り立つ}\\ &\Leftrightarrow\quad \lambda_0f_0(x)+\cdots+\lambda_nf_n(x)=0 \quad \text{がすべての } x \text{ に対して成り立つ}\\ &\Leftrightarrow\quad \lambda_0+\lambda_1x+\cdots+\lambda_nx^n=0 \quad \text{がすべての } x \text{ に対して成り立つ}.\end{aligned}$$

この最後の式の左辺を $F(x)$ と書くと，$F(x)=0$ (恒等式) ならば $F(0)=0$, $F'(0)=0$, …, $F^n(0)=0$ である．このことから $\lambda_0=\cdots=\lambda_n=0$ を得る．

例 1.17. 例 1.6 の $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の要素 $g_0, g_1, \dots, h_1, h_2, \dots$ を

$$\begin{aligned}g_0(x)=1, \qquad g_1(x)&=\cos x, \qquad g_2(x)=\cos 2x, \quad \dots, g_k(x)=\cos kx,\\ h_1(x)&=\sin x, \qquad h_2(x)=\sin 2x, \quad \dots, h_k(x)=\sin kx\end{aligned}$$

で定めると $\{g_0,g_1,\dots,g_n,h_1,\dots,h_n\}$ は 1 次独立である．このことは，しばらく後で（内積の項で）示す．

例 1.18. 例 1.6 の $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の要素 a, b, c を

$$a(x)=1, \qquad b(x)=\cos 2x, \qquad c(x)=\cos^2 x$$

で定めると，a, b, c は 1 次従属である．実際，$a+b-2c=o$ である．

例 1.19. 例 1.13 の特別な場合 ($\alpha=0$, $\beta=1$) を考える：

$$V:=\left\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ は 2 回微分可能で } f''(x)=-f(x) \text{ を満たす}\right\}$$

とすると V は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間である．とくに

$$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \sin x$$

とおくと，$f, g \in V$ で，さらにこれらは 1 次独立である．

問題

1-1 例 1.4 において $\mathrm{M}(m,n)$ の加法とスカラ倍はどのように定義すればよいか．また，零ベクトルにあたる $\mathrm{M}(m,n)$ の要素は何か．

1-2 例 1.6 において $\mathcal{F}(X)$ がベクトル空間となる，すなわち，この例に挙げたように加法とスカラ倍を定義すれば，定義 1.1 の条件が成り立つことを確かめなさい．

1-3 例 1.5 の $\mathcal{S}$ (数列のなすベクトル空間) の部分集合

$$\left\{ \boldsymbol{a} = \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \text{ は収束する} \right\}$$

は $\mathcal{S}$ の部分空間である．このことを確かめなさい．ヒント：解析学の定理「絶対収束する級数の和は絶対収束する」そのもの．

1-4 例 1.13 を確かめなさい．

1-5 例 1.14 を確かめなさい．

1-6 例 1.15 を確かめなさい．

1-7 例 1.19 を確かめなさい．

1-8 例 1.13 の (1.3) で与えられる $V_{\alpha,\beta} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を考える．

- $\alpha^2 - 4\beta > 0$ のとき，

$$f(x) = e^{ax}, \qquad g(x) = e^{bx}$$

  で定まる f, g が $V_{\alpha,\beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 a, b を定めなさい．また，

$$\tilde{f}(x) = e^{px} \cosh rx, \qquad \tilde{g}(x) = e^{qx} \sinh rx$$

  で定まる $\tilde{f}, \tilde{g}$ が $V_{\alpha,\beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 $p, q, r (> 0)$ を定めなさい．

- $\alpha^2 - 4\beta < 0$ のとき，

$$f(x) = e^{ax} \cos pt, \qquad g(x) = e^{bx} \sin qt$$

  で定まる f, g が $V_{\alpha,\beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 a, b, p, q を定めなさい．ただし $p, q > 0$ とする．

- $\alpha^2 - 4\beta = 0$ のとき，

$$f(x) = e^{ax}, \qquad g(x) = xe^{bx}$$

  で定まる f, g が $V_{\alpha,\beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 a, b を定めなさい．