2012 年 10 月 11 日 (2012 年 10 月 18 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 2

お知らせ

- ワイヤレスマイクの不調でご迷惑をおかけいたしました．今週は大丈夫なはず (?) です．
- 前期定期試験の**解答**をほしいというお申し出がありました．講義 web ページ，OCW ともに掲載ミスがありました．（どなたからもご指摘がなかった，ということはだれも興味がなかった?）申し訳ありません．掲載しました．
- 前期の定期試験の**答案**がほしいというご要望がありました．お知らせしたように 8 月 7 日より数学事務室にて返却していましたが，スペース・手間の関係で 8 月末には答案を撤去しました．答案をチェックしてもらい，問題点があれば申し出ていただき，成績提出締切（8 月下旬）までに検討できるようにかなり**無理をしていそいで採点した**のですが，多くの方が答案を受け取っていないようで，**無駄**だったようですね．後期は，中間試験返却の反応をみて，無理をしないようにするかもしれません．その場合，**成績提出締切までに皆さまからのクレイムを受けつけることができない**ことになります．ご了承ください（少し拗ねています）．
- 数学事務室の佐渡山様のご好意により，前期定期試験の答案を返却していただけることになりました．来週 10 月 18 日の授業開始前までは数学事務室においていただけますので，それまでに受け取ってください．なお，試験問題に明記しましたように，採点に関するクレイムは，たとえこちらに不備があったとしても受け付けません．

前回の補足

- 問題 1-8 で使った cosh, sinh についてのご質問が複数ありました：実数 x に対して

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

と定め，　これらをそれぞれ**双曲的余弦** hyperbolic cosine, **双曲的正弦** hyperbolic sine, **双曲的正接** hyperbolic tangent といいます．指数関数を知っていればそれでよいような気もしますが，三角関数と類似の性質が成り立つなど，いろいろと便利なことが多いので**よく使われます**．覚えておいて下さい．

前回までの訂正

- 問題 1-8 第 1 項の p, q は $\alpha = 0$ の場合しか存在ないので，誤りでした．ごめんなさい．次のように修正します．

  $\alpha^2 - 4\beta > 0$ のとき，

$$f(x) = e^{ax}, \qquad g(x) = e^{bx}$$

  で定まる f, g が $V_{\alpha,\beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 a, b を定めなさい．また，

$$\tilde{f}(x) = e^{px}\cosh rx, \qquad \tilde{g}(x) = e^{qx}\sinh rx$$

  で定まる $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ が $V_{\alpha,\beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 p, q, $r(>0)$ を定めなさい．
- 講義資料 1, 2 ページ，例 1.5 の 2 行目：定義するれば ⇒ 定義すれば
- 講義資料 1, 2 ページ，例 1.5 の 3 行目：

$$\text{(2.1)} \quad \boldsymbol{x} = \{x_j\} =_{j=0}^{\infty}= \{x_0, x_1, \dots\}, \quad \boldsymbol{y} = \{y_j\} =_{j=0}^{\infty}= \{y_0, y_1, \dots\}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} = \{x_0, x_1, \dots\}, \quad \boldsymbol{y} = \{y_j\}_{j=0}^{\infty} = \{y_0, y_1, \dots\}$$

授業に関する御意見

- 黒板に変な板がついていたり，マイクが壊れたりと，この教室だけ不具合が多いですね． **山田のコメント：** 呪われている?
- 広い黒板を持つ教室では，前の方の座席に着くと板書が見えづらくなる．声の聴き取りやすさと両立しえないと思うので，次回以降はマイクの使える教室にして欲しい（もう直っているかもしれないけど）
  山田のコメント： 直っているはずです．今回は教室に入った時点で初めて気がついたので，対処がうまくできませんでしたが，不具合は事前に連絡してもらえるよう，教務に要望を出しておきます．
- 次回はマイクが使えるといいです．
- マイクが壊れていましたが，次回までに直っていると良いですね．
- 次回にはワイヤレスマイクが使えるようになってるといいですね．
  山田のコメント： 授業の後に教務に確認しました．5 日金曜日くらいには直っているはずだそうです．
- やはりワイヤレスマイクが欲しいです!
- マイクをつかってほしいです．無線マイクをなおしてほしいです． **山田のコメント：** 私もです．
- マイクなしだったのですが，とても聞きやすかったです．もし次回もマイクなしでもこのままお願いします．
  山田のコメント： 聴きやすくするのはきついので，できるだけ機械に頼りたいです．
- マイクがないのにお疲れさまでした．むりして声がつぶれると後の授業が聞きとりにくくなるので，体調に気をつけてください．
- 次回には無線マイクが使えるといいですね．先生の声帯が心配です．
  山田のコメント： ご心配おかけします．次回には直っているそうです．教務に確認にいったらのど飴をくれました．
- 後期も雑談が楽しみです． **山田のコメント：** どうしよう．
- お変わりのない元気な姿を見て安心しました．/ 先生が前期と変わらず安心しています．
  山田のコメント： ありがとうございます．少しつかれています．肉体の経年変化かと思います．
- 普段の光景が戻ってきました． **山田のコメント：** ですね．
- また先生に会えてうれしいです!! **山田のコメント：** me, too.
- お久しぶりです． **山田のコメント：** おひさしぶりです．
- 授業楽しいです **山田のコメント：** え？
- とても，すごいです． **山田のコメント：** なにが？
- 久しぶりに線形代数を勉強しました．今学期もよろしくお願いします．
- 後期もよろしくお願いします．(4 件) /よろしくお願いします． / 今学期もよろしくお願いします．
  山田のコメント： こちらこそよろしく．
- 今学期もがんばります． /後期はがんばります． /後期こそ頑張ります． /後期も頑張りたいです．
  山田のコメント： どうぞ．“は” とか “も” とか “こそ” とか “たい” とか，ニュアンスの違いが面白いですね．
- 前期の成積が悪かったので，後期は頑張ろうと思います．よろしくお願い致します．
  山田のコメント： だから，字を間違えるなって．
- 授業では，ただ定義とか式ではなく，具体的な例をあげて想像できるように説明してほしい．
  山田のコメント： 今回の授業はまるごとそうでしたが．「具体的」の指すものが違うのかな?
- 難しいと思うところはもう少しゆっくり進めて欲しいです． **山田のコメント：** 一応そのつもり
- 授業が抽象的すぎてよくわからなかった． **山田のコメント：** 具体的なものってむしろわかりにくくないですか?
- 初回からわからなさすぎて挫けそうです． **山田のコメント：** まだまだ
- 後期も難しそうでした． /難しかったです． /初回から難しすぎりゅのおおお． **山田のコメント：** そりゃそうです．
- 1 回目にしてついていけそうにないです． /内容がわかりにくくてついていくのが大変になってきました．
  山田のコメント： 講義で述べたことをバックグラウンドにして，資料をきちんと読んでください．
- 久々でかなり忘れました． **山田のコメント：** そうでしょう．
- 印刷の質が悪いので改善をお願いします．そえ字がかすれてみえなくなっていることが多くて困ってます．
  山田のコメント： とりあえず，プリンタ替えました．それでも改善されない（文脈から理解できないような添字がでてきて，それが読み取れない）がなら，OCW, 講義 web ページの pdf ファイルをご利用ください．
- 中間試験を行う日が遅すぎる． **山田のコメント：** 定期試験の準備のつもりですので，これくらいの日程がベスト．
- まだ寒くないのに眠いです. . .
  山田のコメント： 寒さと眠さは相関関係があるんですか? 寒くて眠いとまずくないですか? 遭難に気をつけて．
- 目がさめたら授業が終わっている時間でした．後期もよろしくお願いします．
  山田のコメント： 冬は夜明けが遅くなるので，客が減ります．教室が寒いとつらいので，暖めに来てください．
- 線形空間がなんだったかすっかり忘れてしまったので，出直してきます．
  山田のコメント： この授業では今回はじめて定義したものですが．
- 老後のしゅみにヴィオラ始めました．教授は老後，何を生きがいにしますか．
  山田のコメント： 小言爺になる．Viola といえば Yuri Bashmet っていいですね．夏に初めて聴きました．
- 先生にとって「工大祭」とは何ですか． **山田のコメント：** 雑用
- 単位ください． **山田のコメント：** いやです．取って行ってください．

質問と回答

■ベクトル空間

質問： { } empty set は線形空間になりますか? 定義に従うと，なにもないものをたしてもなにもないことになるし，定数倍にしても empty set になる．授業中で $W \subset U$ で $W \neq \emptyset$ が部分空間の定義で挙げられたが $W = \emptyset$ になる必要がありますか.

お答え： $\emptyset = \{\ \}$ は，ひとつも要素をもたない集合のこと．ベクトル空間（線形空間）の定義 1.1 の (3) からベクトル空間は $\boldsymbol{o}$ という要素を含まなければならないので，$\emptyset$ はベクトル空間にはならない．注意：空集合を考えるなら，「なにもないものに足す」のではなくのではなく「足す対象 object がなにもない」.

■部分空間

質問： 部分空間について，ベクトル空間 V の部分集合 $W \subset V$ が任意の $v, w \in W$，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $v + w \in W$，$\lambda v \in W$ をみたすとき，V の加法およびスカラ倍を W 上に限るというのは W の中に V の加法およびスカラ倍が含まれるということですか.

お答え： “W の中に V の加法およびスカラ倍が含まれる” という文の意味がわからない．加法もスカラ倍も “操作” (対応) であって W の要素でも V の要素でもないので「含まれる」とは言えないのでは? 以下のようなことを言っている：W の要素 $v, w \in W$ をとる．すると (1) $W \subset V$ だから W 要素 v, w は V の要素．(2) V はベクトル空間であるから V のふたつの要素 v, w に対して V の要素 $v + w$ が定まる．(3) W が部分空間の条件 (資料 1 の (1.1)）を満たすことに注意すれば，$v + w \in W$ である．結論：任意の $v, w \in W$ に対して $v + w \in W$ を対応させる規則 “+” が得られた．この規則 “+” は V の加法そのものを用いているが “+” の両側にくるものを W の要素に限っている．こうして得られた W の加法 $+$ を，“V の加法を W に制限したもの” と言う.

質問： 集合が「スカラー倍に関して閉じている」というのは，「零ベクトルを含む」ということも含むのでしょうか.（$\lambda\boldsymbol{a} \in W$ ならば $\lambda = 0$ で $\boldsymbol{o} \in W$ ということから.）

お答え： $W \neq \emptyset$ ならばその通り．$W = \emptyset$ なら $\boldsymbol{a} \in W$ となる $\boldsymbol{a}$ が存在しないので質問の括弧内の議論が成立しない.

質問： 3 次元 (x, y, z) 内に一つの平面はその 3 次元ベクトル空間の部分空間ですか? **お答え：原点を通る**平面はそう.

■数列の空間

質問： 例 1.5: $\boldsymbol{a} = \{a_0, a_1, \dots, \}$，$\boldsymbol{b} = \{b_0, b_1, \dots, \}$，項の数が定まっていない状態で，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ を定義（というか計算?）としても良いのだろうか? （例えば，$\boldsymbol{a}$ の項数が 4 で $\boldsymbol{b}$ の項数が 5 であれば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は計算できないはず?)

お答え： 例 1.5 には「(無限）数列全体」とあります．$\mathcal{S}$ の要素は $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$．したがって，項の数は「いくらでもある」という意味で決まっている．括弧内のような状況は起きえない.

質問： the zero vector $\boldsymbol{o} = \{0, 0, \dots\}$ についてですが，「=」であって「:=」でないのはあくまでも $\boldsymbol{o}$ の定義は加法の単位元であって，右辺はその結果であり定義でないということでしょうか.

お答え： そう思ってよい．“$\boldsymbol{o} := \{0, 0, \dots\}$ とおけば，ベクトル空間の定義の (3) を満たす” という言い方でもよい.

質問： 例 1.10 の講義資料，$\mathcal{S}_c$: $\{\{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{S}_{\circ} \dots$ c が入っていないのは間違いですよね.

お答え： いいえ．左辺の : は “: =” （ちゃんと写そう)．これは “左辺を右辺の式で定義する” という意味だから，$\mathcal{S}_c$ という集合を右辺の式で定義していることになる．定義が完了するまでは記号 $\mathcal{S}_c$ の意味は未確定なので，丸印のところに c が入ると，“$\mathcal{S}_c$ の定義をするのに $\mathcal{S}_c$ を使う” という ouroboros の蛇状態になり，まずい.

質問： $\mathbb{N}$ は自然数の集合なので，$\overline{N}$ は自然数以外の集合ではないのですか? 全体をどの様なものにとるかによって $\overline{\mathbb{N}}$ はどの様な集合になるかは，かわりますが，$\overline{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とはならないと思います．なぜ $\{0, 1, 2, \dots\}$ を $\overline{\mathbb{N}}$ とおいたのですか?

お答え： ごめんなさい．$\overline{\mathbb{N}}$ を「$\mathbb{N}$ の補集合 complement」と読まれたのですね．たしかに高等学校の教科書の多くでは集合 A の補集合を $\overline{A}$ で表しているようでしたので，気をつけるべきでした．実は，数学の文脈では補集合を $\overline{A}$ で表すことは**ほとんどありません**．位相空間論（この授業では扱わない内容なのでお話として）では $\overline{A}$ でしばしば A の閉包 closure を表す．厳密には定義しないが，たとえば開区間 $(0, 1)$ の閉包 $\overline{(0, 1)}$ は閉区間 $[0, 1]$ となる．このような文脈では，同じ記号で補集合を表せないので別の記号（しばしば A^c とか A' など）で表す．あるいは，全体集合を X として $X - A$ や $X \setminus A$ などとすることもよくある．このように統一された書き方がないようなので補集合を使う場合はその都度（その文脈で最初にでてきたときに）断る必要がある．というわけで，ここでの $\overline{\mathbb{N}}$

は一つの集合にその場限りにつけた名前です．ここでだけ使います．

質問： $\mathcal{F}(X)$ や $\mathcal{S}$ のように文字を太字にせず書式を変えるのは何か強調される目的があるということですか?

お答え： 「かなり大きい集合」なので，今回はその気持ちを表した．統一された用法ではなく local な使い方．

質問： 黒板では数列全体の集合を $\mathcal{S}$ と表していましたが，単に S と書くと数学的に誤りになるのでしょうか．

お答え： 数列全体の集合を $\mathcal{S}$ と書くのはこの場での local な記法．他の文脈で "数列全体の集合を S と書く" と断って議論を始めること自体は（記号 S が他の意味で使われていないならば）何ら問題はない．数列全体の集合を $\mathcal{S}$ と書く文脈（この講義の講義資料など）で，S と書いたらそれは "$\mathcal{S}$ と違うなにか" と解釈される．

■関数の空間

質問： 例 1.6 の実数値（複素数値）関数について，$Y \subset \mathbb{R}$ として，$f\colon X \to Y$ という関数も X 上の実数値関数ですか?

お答え： そうです．ただし f の値が Y をはみ出さないという条件が必要．たとえば $f(x) = \cos x$ で定まる関数は $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f\colon \mathbb{R} \to (-2, 2)$ などとみなせるが，$f\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ とみなすことはできない．念のため "$\mathbb{R}$ から $[-1, 1]$ への関数全体の集合" はベクトル空間にはならない．

質問： 例 1.19 で $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$ の部分が $\mathbb{C}$ だった場合，$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $g(x) = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ とおくと $f, g \in V$ でこれらは１次独立であるんでしょうか．

お答え： $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$ は関数の定義域．ご質問の f, g を考えるには値域の方を $\mathbb{C}$ にしなければならない：

$$\mathcal{F} := [\mathbb{R}\text{ 上で定義された複素数値関数全体の集合}] = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}, \qquad V := \{f \in \mathcal{F} \mid f'' + f = 0\}.$$

すると $\mathcal{F}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で，V はその部分空間，ご質問の f, g は V の１次独立な要素．

質問： 講義において $\mathbb{R}^2 = \mathcal{F}(\{1, 2\})$ としましたが，$\mathbb{R}^2 = \mathcal{F}(\{2, 1\})$，$\mathbb{R}^2 = \mathcal{F}(\{0, 0\})$ とすることも可能ですか?

お答え： $\mathbb{R}^2$ の各々の要素の２つの成分を区別する番号（ラベル）のつけ方だけなので，$\mathcal{F}(\{\heartsuit, \spadesuit\})$ でもよい．ただし，集合として $\{0, 0\} = \{0\}$ なので（0 と 0 は区別できない）最後の例のようにはできない．

質問： 黒板に $(\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n)(x) = o(x) \Rightarrow \lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$ と書いてありましたが， なぜですか?

お答え： 関数の加法・スカラ倍の定義（講義資料 1, 3 ページ 4 行目）と $o(x)$ の定義（講義資料 1, 3 ページ 7 行目）．ただし，最後に "for all x" が必要．

質問： 例 1.19 において $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ のとき f と g が１次独立であることは自明のように扱っていいのでしょうか．

お答え： 講義で示した．あなたにとって自明（必要なら簡潔に証明を与えられる）なら，自明のように扱ってよい．

■１次独立性

質問： 前期の授業ではベクトルについて一次独立性について論議していましたが，今回の授業で，ベクトルではない関数に関して，一次独立という言葉を使ったということはどのような種類の数の要素の組に対しても一次独立性に関する論議ができるんですか？

お答え： 「ベクトルであるものとベクトルでないもの」のあなたなりの区別があるはずですが，それは何でしょう．実はこの講義では (explicit には言っていないが) 「ベクトル」は未定義．多分，あなたが単語「ベクトル」で想像しているのは「$\mathbb{R}^n$ の要素」でしょうが，これは「n 次元数ベクトル」というべきものです．一方，前回「ベクトル空間」を定義しました．ベクトル空間の要素を「ベクトル」という習慣がある（explicit には述べていないが）ので，授業で扱った関数の空間（ベクトル空間とみなす）の要素を（その文脈では）ベクトルと言ってよい．「ベクトル空間」とは，「１次結合」などの言葉が意味をもつための（最低限の）構造，すなわち加法とスカラ倍が与えられた集合のことなので，関数の集合をベクトル空間とみなした時点で，１次独立性が意味をもつことになる．

質問： 3 つのベクトルの場合 1 次独立とは 3 つのベクトルが同じ平面にないということですか?

お答え： 「同じ平面にない」とはどういうことを表していますか?

■違いがわかりません

質問： 行列とベクトルと数列の違いを教えて下さい．

質問： 授業を聞いて行列とベクトルと数列の違いがわからなくなったのですが，どう違うか教えて下さい．

お答え： 行列は数を縦横に長方形に並べたもの，数列は数に番号をつけて無限個並べたもの，n 次数ベクトルは数を n 個縦に並べたもの．違いは明らかです．このこと自体はこの講義の間ずっと変わっていません．「行列の集合」「数ベクトルの集合」「数列の集合」に同じような構造が入れられて，形式的に同じ議論ができる，というのが今回の話．

質問： 数列とベクトルの違いは加法やスカラ倍ができるかできないかってことですか?

お答え： 数列には加法やスカラ倍ができないんでしょうか．例 1.5 では数列同士を足したりしているように見えますが．

質問： ベクトル空間と部分空間の違いがまだちゃんと理解できていません．

お答え： 「ベクトル空間 V の部分集合で特別な性質 (1.1) をもつものを V の部分空間という」それだけです．

質問： ベクトル空間と部分空間の関係はどのようなものですか． **お答え：**上の質問と回答参照．

質問： $\mapsto$ と $\to$ の違いは何ですか． **お答え：**講義資料 1, 2 ページ下から 8 行目のように使い分ける．

■説明して

質問： 講義資料 1 の例 1.17「例 1.16 の $\mathcal{F}(\mathbb{R})$〜」の例 1.6 が何を指しているのか不明．説明を求む．

お答え： 講義資料 1，2 ページの下から 11 行目以下のパラグラフを指している．

質問： 講義資料の 2 ページ目で，「例 1.3」で，"$\mathbb{R}^n = \{{}^t\{x_1, \dots, x_n\} | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ 〜"（原文ママ．内側の中括弧はたぶん [ ] のことですね）とありますが，なぜ転置になっているのかがわかりません．

質問： p.2 で例 1.3 で ${}^t[\ ]$ となっている理由がわからない．[ ] ではないのか．

お答え： 前期の講義資料 11，3 ページ（2012 年 7 月 5 日）で既出．「縦に書く」理由はそのときに説明した．

質問： $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ の意味が分かりませんでした．$(f + g)$ とは何でしょうか．

お答え： 黒板には左右逆に書いたはず．$f + g$ という関数を $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ によって定義する．

質問： 注意 1.7 がよく理解できませんでした．もう一度解説をお願いします．

質問： 1.7 のところの説明がよく分からなかったです．

お答え： どういうところがでしょう．

質問： スカラ倍が実数倍の意味だと言っていましたが，よくわかりませんでした． **お答え：**何がですか?

■問題

質問： 1-6 がイメージとしては理解できるのですが，どう示せばよいのか糸口が全くつかめません．

お答え： 例 1.15 本文の「実際」以下で証明の概略をかいてありますが．

質問： 問題 1-8 で $\alpha^2 - 4\beta$ に関する条件はどう使えばいいのですか．

質問： 問題 1-8 について，なぜ $\alpha^2 - 4\beta$ で場合分けをするのかわかりませんでした．解説して欲しいです．

質問： 問題 1-8 で $\alpha^2 - 4\beta$ の大きさで場合分けしていましたが，なぜ $\alpha^2 - 4\beta$ で場合分けするのですか．

質問： 1-8 がよく分からなかったので解き方を教えて下さい．

お答え： 各々の場合に，問題に与えられた f, g が微分方程式 (1.2) を満たす（すなわち方程式 (1.2) の左辺に代入したら恒等的に 0 になる）ように定数 a, b,... を決めてやればよい．そのような実数 a, b... が存在する条件として，問題に与えられた場合分けが自然にあらわれるので，とにかく計算してみてください．

■言葉など

質問： ベクトル空間でない空間はどのようなものがあるか教えてください．

お答え： 「空間」という語で何を想像するかで答えが違います．講義では，「空間」は「集合」と同義ということにしましたよね．その意味では「ベクトル空間でない集合」は沢山あります．

質問： 「体」は講義で扱いますか（プリントにはありましたが）． **お答え：**「加減乗除ができる集合」以上は扱わない．

質問： 今回はすごい抽象的な内容でかすかにしか理解できなかったのですが，これからの授業や演習を受けたら出来るようになりますか? どれくらい難しいか分からないので理解できるか不安です．

お答え： 授業を聞き演習に参加するだけの人に理解させられるか，私も不安です．抽象的なことを理解するには「書いてあることを書いてあるままに読む」努力が必要．読んで，手を動かして「腑に落ちる」まで時間をかけるべき．

■その他

質問： すみません．どこが分からないのかすら分からないです． **お答え：**それを探すのに時間をかけてください．

質問： いそがしかったので，質問を考える時間がありませんでした `orz` **お答え：**時間がとれるとよいね．

質問： 後期は前期と比べてどれくらい難しいですか **お答え：**2.3 倍くらい（当社比）

質問： なんで中間試験の日程がおそいんですか． **お答え：**定期試験の準備と位置づけているので．

質問： ワイヤレスマイク復活の予定日はいつですか? **お答え：**教務に確認したところ 10 月 5 日．

質問： 単位ごちそう様でした!! 時差ぼけが治らさい（原文ママ）のですが，どうすればいいですか?

お答え： 時差ぼけは治るものではなく治すものです．無理やり現地時間で活動すればよいのです．

質問： そんなことよりおうどん食べたい． **お答え：**どうぞ．

2 基底・次元

前回に引き続き（実数上の）ベクトル空間 V を考える．

2.1 基底

定義 2.1. ベクトル空間 V の有限個の要素の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が V の**基底** a basis であるとは，次を満たすことである．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立.
(2) $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle$，すなわち V は $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ で生成される．

補題 2.2. ベクトル空間 V の要素の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底であるための必要十分条件は

V の任意の要素は $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合でただひと通り（一意的 unique）に表される

ことである．

証明： 組 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ が V の基底であるとすると，定義 2.1 の条件 (2) から（例 1.8 を思いだせば）

$$V = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

であるから，$\boldsymbol{v}$ は $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$ の形に表される．さらに，$\boldsymbol{v}$ が $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の一次結合でふた通りに表されたとする：

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \mu_n \boldsymbol{a}_n$$

すると

$$(\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{a}_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

となるので，定義 2.1 の条件 (1) から $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$ となるので，ふた通りの表し方は一致しなければならない．すなわち任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の一次結合の形でひと通りに表される．
逆に任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の一次結合で一意的に表されるとすると，とくに定義 2.1 の (2) が成り立っている．さらに，$\boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{a}_1 + \dots + 0\boldsymbol{a}_n$ なので，V の要素を $\{\boldsymbol{a}_j\}$ で表す表し方がひと通りであることから

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

ならば $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ なので定義 2.1 の (1) が成り立つ．

例 2.3. 正の整数 n をひとつ固定する．n 次単位行列 I の j 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{e}_j$ と書く（$j = 1, \dots, n$）このとき $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル**とよぶ．基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．このことは定義 2.1 を直接確かめてもよいし，補題 2.2 を用いても容易に確かめられる．

例 2.4. n 次正則行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$ に対して，$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底を与える．

実際, $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ は $A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{\lambda} = {}^t[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$) と書き換えられるので, A の正則性から $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の一次独立性が得られる．また，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{v} = A(A^{-1}\boldsymbol{v}) = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$ (ただし ${}^t[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = A^{-1}\boldsymbol{v}$) なので $\mathbb{R}^n = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle$.

2012 年 10 月 11 日 (2012 年 10 月 18 日訂正)

2.2 次元

補題 2.5. ベクトル空間 V のふた組みの要素の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ がともに V の基底ならば $m = n$ が成り立つ．

証明： $\{\boldsymbol{a}_j\}$ が V の基底を与えていることから，各 $\boldsymbol{b}_k$ は $\boldsymbol{a}_j$ の一次結合で表される：

$$\boldsymbol{b}_k = \alpha_{1k}\boldsymbol{a}_1 + \dots + \alpha_{mk}\boldsymbol{a}_m \qquad (k = 1, \dots, n).$$

これを形式的に行列を用いて

$$[\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n] = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m]A \qquad A = [\alpha_{ij}]$$

と表す．ただし A は $m \times n$ 型行列．ここで

$$\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{b}_n = [\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n]\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m]A\boldsymbol{\lambda} \qquad (\boldsymbol{\lambda} = {}^t[\lambda_1, \dots, \lambda_n])$$

であるから，$\{\boldsymbol{a}_j\}$ が一次独立であることを用いれば

$$\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m]A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$$

さらに $\{\boldsymbol{b}_l\}$ も一次独立であったから，この最後の方程式 $A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$ は非自明な解をもたない．したがって，この節の最後に挙げる補題 2.15 と 2.14 から $\operatorname{rank} A = n \leqq m$ が成り立つ．同じ議論を $\{\boldsymbol{a}_j\}$ と $\{\boldsymbol{b}_l\}$ の役割を入れ替えて行えば $m \leqq n$ が成り立つので $m = n$ である．

定義 2.6.
- ベクトル空間 V に基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が存在するとき，n（ひとつの基底を構成するベクトルの個数）を V の**次元** dimension といい，$\dim V$ と表す[*1]．
- ベクトル空間 V が零ベクトル $\boldsymbol{o}$ のみからなる場合は，V は 0 次元，すなわち $\dim V = 0$ であると定める．
- 零ベクトル以外の要素をもつようなベクトル空間 V が基底をもたないとき V は**無限次元** infinite dimensional であるといい $\dim V = \infty$ とかく．

例 2.7. $\mathbb{R}^n$ の次元は n である．

■$\mathbb{R}^n$ の部分空間の次元　以下の事実は次回証明する．$\mathbb{R}^n$ の具体的な部分空間の次元の求め方は前期に扱った．

例 2.8. $m \times n$ 行列 A に対して

$$V := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

とすると，V は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である（例 1.9）．とくに

$$\dim V = n - \operatorname{rank} A$$

が成り立つ．

例 2.9. $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_k$ が生成する $\mathbb{R}^n$ の部分空間の次元は

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]$$

に一致する．

[*1] この定義をするために補題 2.5 が必要．実際，基底をいろいろ取るごとに基底を構成するベクトルの個数が変わるのでは次元が定義できない．

■無限次元

命題 2.10. ベクトル空間 V が無限次元であるための必要十分条件は，任意の正の整数 n に対して，一次独立な V の要素が n 個 存在することである．

証明： $\dim V = m$（有限次元）ならば任意の $m+1$ 個以上の V の要素は一次従属である（演習問題）．したがって任意の n に対して，一次独立な V の要素 n が存在するならば $\dim V = \infty$．一方，n 個の一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が存在し，かつ $n+1$ 個以上の V のベクトルの組は必ず 1 次従属であるとする．このとき任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{v}\}$ は一次従属だから，$\boldsymbol{v}$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の一次結合で表される（すこし議論が必要．演習問題）．したがって $\{\boldsymbol{a}_j\}$ は V の基底となるので，$\dim V = n$.

例 2.11. 例 1.5 で挙げた数列のなすベクトル空間 $\mathcal{S} =$ (実数を成分とする無限数列全体) は無限次元である．

実際，例 1.15 より，任意の n に対して $\mathcal{S}$ の一次独立な n 個の要素をとることができる．

例 2.12. 例 1.6 で与えれた $\mathbb{R}$ 上で定義された関数全体の成すベクトル空間 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ は無限次元である．

実際に $f_k(x) = x^k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ で $f_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を定義すると，$\{f_0, \dots, f_n\}$ は一次独立である（例 1.16 参照).

例 2.13. 前回の例 1.19 で挙げたベクトル空間

$$V := \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ は 2 回微分可能で } f''(x) = -f(x) \text{ を満たす} \right\} \tag{2.1}$$

の次元は 2 である．

$p(x) = \cos x$, $q(x) = \sin x$ とおくと $p, q \in V$ かつ p と q は一次独立である（問題 1-8)．以下，V が p, q で生成されることを示そう．$f \in V$ に対して $a = f(0)$, $b = f'(0)$ とおき，

$$g(x) := a \cos x + b \sin x = (ap + bq)(x)$$

とおく．このとき f と g が一致することを示せば十分である．これを示すために，$h = f - g$ とおくと $h \in V$ で，$h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ である:

$$h''(x) + h(x) = 0, \qquad h(0) = h'(0) = 0.$$

すると，任意の x に対して

$$\begin{aligned} h'(x)h''(x) + h(x)h'(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\{h'(x)\}^2 + \{h(x)\}^2\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \{h'(x)\}^2 + \{h(x)\}^2 = \text{一定}\ \{h'(0)\}^2 + \{h(0)\}^2 = 0 \end{aligned}$$

とくに $h(x) = 0$ が任意の x に対して成立する．したがって $h = o$，すなわち $f = g = ap + bq$.

2.3 復習—同次連立一次方程式の自明でない解

前期の講義の定義に従えば，同次連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \qquad (A \text{ は } m \times n \text{ 型行列，未知ベクトル } \boldsymbol{x} \text{ は } n \text{ 次列ベクトル} \tag{2.2}$$

の解（解空間）とは，集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$ のことであった．とくに (2.2) の解は n 次の零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を含む．これを，**自明な解** the trivial solution という．解が $\boldsymbol{o}$ 以外の要素を含むとき，(2.2) は**非自明な** nontrivial 解をもつという．

補題 2.14. 行列 A が $m \times n$ 型でその階数 rank が r ならば，$r \leqq m$ かつ $r \leqq n$ が成り立つ．

証明： 行列 A は行基本変形により階数 r の階段行列 (テキスト 25 ページ) B に変形できる．とくに階段行列の形から，B の列ベクトルを入れ替えれば

$$\begin{bmatrix} I_r & * \\ O & O \end{bmatrix} \qquad (I_r \text{ は } r \text{ 次の単位行列})$$

の形となる．これらの変形は行列の型を変えていないから r はもとの行列の行，列の数を超えない．

補題 2.15. 同次連立一次方程式 (2.2) が非自明な解をもたないための必要十分条件は，係数行列 A の階数 r が未知数の個数 n と一致することである．

証明： 行基本変形と列の入れ替え（列基本変形）によって，A は補題 2.14 の証明の形に変形できる．さらに第 j 列 $(j > r)$ に第 1 列から第 r 列のスカラ倍を加える（列基本変形）により，$r+1$ 列目以降を $\mathbf{0}$ にすることができる．行（列）基本変形は正則行列を左（右）からかける操作だから

$$(*) \qquad PAQ = C = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

となる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する．
いま，補題 2.14 より $r \leqq n$ であるが，$r < n$ とするとき $\boldsymbol{x} := Q\boldsymbol{e}_{r+1}$ ($\boldsymbol{e}_{r+1}$ は $\mathbb{R}^n$ の $r+1$ 番目の基本ベクトル) とおけば，Q が正則行列であることから $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$，かつ

$$A\boldsymbol{x} = P^{-1}CQ^{-1}\boldsymbol{x} = P^{-1}(C\boldsymbol{e}_{r+1}) = P^{-1}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}.$$

したがって (2.2) は非自明な解をもつ．このことから (2.2) が非自明な解を持たないならば $r = n$．
一方，$r = n$ ならば，$*$ は

$$PAQ = C = \begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}$$

の形になるので，P, Q が正則であることに注意すれば，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \;\Rightarrow\; P^{-1}CQ^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \;\Rightarrow\; CQ^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \;\Rightarrow\; I_nQ^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \;\Rightarrow\; Q^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o},$$

すなわち (2.2) の解は自明なもののみからなる．

問題

2-1 例 2.3 を確かめなさい.

2-2 例 2.4 を確かめなさい.

2-3 n 次元ベクトル空間 V の n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底であるための必要十分条件はこれらが一次独立となることである.（ヒント：V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ を一つ固定して，基底変換[*2] $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]A$ を考えると，$\{\boldsymbol{v}_j\}$ が一次独立ことは A の正則性と同値).

2-4 n 次元ベクトル空間 V の n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底であるための必要十分条件はこれらが V を生成することである.

2-5 テキスト 91 ページ問 12，111 ページ，4.4, 4.5, 4.6, 112 ページ 4.15 (前期の講義資料 13 から再録)

2-6 ベクトル空間 V の次元が n ならば，V の m 個（$m\geqq n+1$）のベクトルは一次従属である.

2-7 ベクトル空間 V の n 個の一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が存在し，かつ $n+1$ 個以上の V のベクトルの組は必ず 1 次従属ならば，このとき任意の $\boldsymbol{v}\in V$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の一次結合で表される.（ヒント：$\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{v}\}$ は一次従属なので $\lambda_0\boldsymbol{v}+\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\dots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o}$ を満たす $[\lambda_0,\dots,\lambda_n]\neq\boldsymbol{o}$ が存在する．このとき $\lambda_0\neq 0$ となることを示せばよい.）

2-8 例 2.11 を確かめなさい．また，例 1.10 の $\mathcal{S}_c$, 問題 1-3 の空間はそれぞれ無限次元であることを示しなさい.

2-9 例 2.12 を確かめなさい．また，例 1.11 の $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ はそれぞれ無限次元であることを示しなさい.

2-10 例 2.13 を確かめなさい.

2-11 数列の集合

$$V:=\left\{\boldsymbol{a}=\{a_j\}_{j=0}^{\infty}\,|\,a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=0(n=0,1,2\dots)\right\}$$

すなわち 3 項間の同次線形漸化式を満たす数列全体の集合を考える．このとき

- V が $\mathcal{S}$ の部分空間であることを確かめなさい.
- V は有限次元か.

[*2] $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底ならば，各 $\boldsymbol{v}_k$ $(k=1,\dots,n)$ は

$$\boldsymbol{v}_k=\alpha_{1k}\boldsymbol{a}_1+\dots+\alpha_{mk}\boldsymbol{a}_n$$

とただひと通りに書ける．このことを正方行列 $A=[\alpha_{jk}]$ を用いて $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]A$ と表す．$\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ が基底となるとき，行列 A を基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ への基底変換という.