2012 年 10 月 18 日 (2012 年 10 月 25 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 3

前回の補足

- 講義資料 2 の問題 2-3 にて用いた用語「基底変換」が無定義でした：
  $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底ならば，各 $\boldsymbol{v}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ は
  $$\boldsymbol{v}_k = \alpha_{1k}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_{mk}\boldsymbol{a}_n$$
  とただひと通りに書ける．このことを正方行列 $A = [\alpha_{jk}]$ を用いて $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]A$ と表す．$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が基底となるとき，行列 A を基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ への基底変換という．

前回までの訂正

- 講義資料 2，7 ページ 5 行目：
  $$\boldsymbol{b}_k = \alpha_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_{km}\boldsymbol{a}_m \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{b}_k = \alpha_{1k}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_{mk}\boldsymbol{a}_m$$
- 講義資料 2, 8 ページ 3 行目：一次独立な V の要素 n が存在 ⇒ 一次独立な V の要素が n 個 存在
- 講義資料 2, 9 ページ，補題 2.15 の証明：最初の文の後に次を追加：
  さらに第 j 列 $(j > r)$ に第 1 列から第 r 列のスカラ倍を加える（列基本変形）により，$r + 1$ 列目以降を $\mathbf{0}$ にすることができる．
- 講義資料 2, 9 ページ，補題 2.15 の証明の中の $(*)$ 式：
  $$PAQ = C = \begin{bmatrix} I_r & * \\ O & O \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad PAQ = C = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
- 講義資料 2, 問題 2-9: $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}^r(\mathbb{R})$ ⇒ $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$

授業に関する御意見

- マイクの調子が悪いのはこの部屋だけではなかったようです．
  山田のコメント： どこも悪いとすると根本的に考えないといけませんね．
- 今夏いは先生の声がよく聞こえました． **山田のコメント：** よかった．
- 夏にしろ秋にしろ冬にしろ教室の中と外の温度差がありすぎて気分が悪くなってしまうので，空調をどうにかしてほしい．
  山田のコメント： 具体的にはどうしましょう．外の気温と同じくらいがよいのでしょうか．
- なんとなくわかった． **山田のコメント：** なんとなく，ね...
- だんだんむずかしく感じます． **山田のコメント：** そうですね．いつのまにかやさしくなっているといいんだけど．
- 難しいです． **山田のコメント：** そうですか．
- 定理の証明を厳密にやってほしいです．
  山田のコメント： きちんとやるべきところはやります．そうでないときはなるべく資料に書いておきます．
- 数学も英語もむずかしいですね． **山田のコメント：** でも避けて通れませんね．
- 授業中に英単語が前期より多く出ていますね．筆記体で書かれた部分が文字が小さかったりつぶれて読めないことがあります．なるべく日本語，どうしても英語ならばブロック体でおねがいします．
  山田のコメント： 「授業を英語でやるべき」という動きもありますよ．学生の意見としてどうですか?
- 黒板に英語で書かれた部分が少し読み取り辛かったです． **山田のコメント：** 善処します．

- すいません，先週提出物の紙を出し忘れました．お手数おかけして申しわけありません． **山田のコメント：** はい．
- 前回の質問用紙の提出をし忘れたので，お手数ですが名簿に加えておいてください． **山田のコメント：** 了解．
- 微妙な緊張感がいい授業だと思います． **山田のコメント：** どのくらい微妙？
- 朝起きるのがつらい． **山田のコメント：** どのくらいつらい?
- 最近電車の遅延が多くて困ります． **山田のコメント：** 全く東京はこれだから...
- オペラはお好きですか？ **山田のコメント：** あんな三角関係のどろどろ...好きです．
- 学力は衰退しました． **山田のコメント：** やっぱり

質問と回答

■基底

質問： ベクトル空間の基底が V の有限個の要素の組 $\{a_1,\dots,a_n\}$ が a_1, ..., a_n が 1 次独立で $V=\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ という条件を満たすのなら，いくらでも多様にとることができるのでしょうか．

お答え： そうですよ，ということを言いませんでしたっけ．前期もやりましたが．

■次元

質問： ベクトル空間 V について $\dim V=1$ という状況はありえますか? もしあるのなら 1 つ例をください．

お答え： $\mathbb{R}\ (=\mathbb{R}^1)$，講義資料 2, 例 2.3.

質問： 3 次元以上は想像できないですか．物理的には 3 次元以上は可能ですか．

お答え： 物理的に想像できないといけませんか? 量子力学では自然に無限次元空間を考えているわけで（それは「われわれの住んでいる空間」ではない）むしろ物理的にはなんでもありと思いますが．

質問： V が有限次元であることと V が部分空間であることに包含関係はありませんか．

お答え： 「V が有限次元 $\Rightarrow$ V は部分空間」は（言葉は変ですが）自明に成り立ちますね．ここでは次元をベクトル空間に対してしか定義していないので，V はベクトル空間．したがてて V は V の部分空間．逆は成り立ちません．問題 2-8 のように $\mathcal{S}$ の非自明な部分空間で無限次元なものがあります．

■無限次元

質問： 定義 : $V\neq\{\emptyset\}$ と基底をもたないとき $\dim V=\infty$．“基底をもたない” というよりも “無限個の基底をもつ” という意味となるのではないでしょうか．

お答え： 基底は定義から，有限個のベクトルの組です．「無限個のベクトルからなる基底」はいまのところ考えません．（考える場合もありますが，その際は基底の定義を少し変更する必要があります．いずれにせよ「線形代数」というよりは解析学の範疇です．）ちなみに 1 次元以上の線形空間は有限次元であっても「無限個の基底」をもちます．（言葉の意味をよく考えてみてください．）

質問： 無限次元であることを証明する際，任意の n に対して n 個の一次独立な要素をもつことはなんとなくわかるのですが，上手に証明することができないので，例として無限次元であることの証明を 1 つしっかりとやってもらえると嬉しいです．

お答え： $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ が無限次元であることの証明をやってみたはず．例 2.12 でいっていることそのままです．

■例 2.13

質問： 講義で V を $f''+f=0$ の解空間として，$f\in V$, $p(x)=\cos x$, $q(x)=\sin x$, λ, $\mu\in\mathbb{R}$, $h=f-(\lambda p+\mu q)$ としたときに $h(0)=h'(0)=0$ となるのは何故でしょうか．

お答え： λ, μ をある特定の値にしています．そこを見落としていませんか．講義資料の例 2.13 では λ, μ のかわりに a, b を使っています．

質問： $V=\langle p,q\rangle=\{\lambda p+\mu q\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ の $\therefore$ の後，なぜ $\lambda:=f(0)$, $\mu:=f'(0)$ と置くのは $h(0)=h'(0)=0$ とするためですよね．このときの p, q は $p(x)=\cos x$, $q(x)=\sin x$ ということなんですか?

お答え： 前半，文が変ですが，そうです．後半，そういう文脈のつもりです．

質問： (3) は $p(x)=\cos x$, $q(x)=\sin x$ の場合についての議論ですか? **お答え：**文脈がわかりませんが多分そうです．

質問： 授業の板書の (4) 部分で $V=\{\lambda p+\mu q|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ を示すために $\lambda=f(0)$, $\mu=f'(0)$ とおきましたが，λ と μ は任意の定数なのに $f(0)$ や $f'(0)$ と “=” で結んで証明を初めてよい理由がわかりませんでした．任意なのに勝手に条件をつけたしているような気がしますが，どういうことなのでしょうか?

お答え： 「任意」という言葉をイメージ的にしか使っていないようですね．この場合は（この場合は，が重要）「任意だから勝手に決めていい」んです．確認しますと，示したいことは「$f \in V$ ならば $f \in \{\lambda p + \mu q \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ である」ことです．仮定の部分でやることは V の要素 f を任意にとってくる．「とってくる」f は，ここでは 1 つです．無限個一度にもってくるわけではありません（無限個を一度に扱っているわけではないことに注意しましょう．あくまでも同時に扱う f は 1 個．ただ，その選び方は「任意」です．$f \in V$ 以外の条件は付けないで議論をします．すると，どんな f に対しても結論が得られる，というしくみです）．結論の部分は，このようにしてとってきた「1 つの f」 が $\{\lambda p + \mu q \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ の要素である，ということです．この集合の要素とは $2p + 3q$ とか $(-1)p + 0q$ とか，具体的な p と q の線形結合の形をしているものです．したがって f がこの集合の要素であることは，λ, $\mu \in \mathbb{R}$ の値をうまく定めてやれば，$f = \lambda p + \mu q$ とかける，ということです．ここで，あくまでも f は特定の 1 つの V の要素ですから，λ や μ はいろいろな値になるわけはありません．たぶん「一つに決まる」はずです．ここで証明したことは，$\lambda = f(0)$, $\mu = f'(0)$ とおくと（λ, μ をうまく定める，という部分の定め方を具体的に与えた）$f = \lambda p + \mu q$ と書けるということ．とくに $\{\lambda p + \mu q \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ の係数には何も制限をつけていない（これが「λ, μ は任意」の意味）なので $\lambda = f(0)$, $\mu = f'(0)$ とおいたときに，$\lambda p + \mu q$ が考えている集合の要素にならない心配はない（というのが「任意」の使い方）．ということです．言葉はイメージで使わず，ちゃんと意味を考えましょう．

質問： $\lambda \cos x + \mu \sin x$ がベクトル空間を生成することができるので $A \cos(x + \alpha)$ もベクトル空間を生成することができますか? その場合，$\dim V = 1$ ですか？

お答え： α は特定の値ですか，A は特定の値ですか? それによって答えが変わりますが，α, A が任意なら

$$\{f \,|\, f(x) = A \cos(x + \alpha), A \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{g \,|\, g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

が成り立ちます．証明は “$\subset$”, “$\supset$” の両方の包含関係を示せば良い．これには三角関数の加法定理と合成公式を用いればよい．この集合はベクトル空間でその次元は 2.

質問： $V = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) | f''(x) + f(x) = 0\}$ の V が 2 次元というのは，$\underline{f(x)\ \text{と}\ f''(x)\ \text{が}\ 1\ \text{次独立}}$ ということですが，$f''(x)$ は $f(x)$ から導かれるので $f(x)$ に対して従属的な気がするのですが，そういうこととは関係ないんですね.

お答え： 下線（山田がつけました）をつけた部分が間違っています．V が一次独立は 2 つの関数で生成されることから 2 次元だとわかるんです．どうしてこういうふうに思ってしまったんだろうか.

■線形微分方程式の解空間

質問： 線形微分方程式は $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) | f''(x) + f'(x)\alpha(x) + f(x)\beta(x) = 0\}$ でなく，$f^{(n)}(x) + f^{(n-1)}(x)\alpha_1(x) + \cdots + f(x)\alpha_n(x) = 0$ でも一般に線形といえますか.

お答え： いえます．すなわち，解 f_1, f_2, ... の線形結合が解になっているものを線形微分方程式というわけです（もうすこし拡張した意味でこの語をつかうこともあります）．ところで，たぶん $f'(x)\alpha(x)$ ではなく $\alpha(x)f'(x)$ と書いたほうが落ち着くような気がします．どちらが “未知数” か，ということです.

■記号や言葉

質問： “引く” ことは “足して 0 になる” ものを考えないと定義できないのでしょうか? 演習で，よくわからなかったので，このようなわけのわからない質問となってしまいました．次回はちゃんとした質問を考えます.

お答え： ベクトル空間を講義資料の定義 1.1 のように「最低限の性質」で定義しようとすると，その中には「引き算」が入っていません．それでも “$x + y = 0$ となる y を加える” ことを “x を引く” こと，と定義すれば引き算を定めることができる，という意味で，定義のなかに引き算を入れなくてもよい，ということです．ただ，われわれが扱う具体的な “ベクトル空間” の引き算はあたりまえに定義できる（たとえば “関数の差の定義” に議論の余地があるとは思えない）ので，あまり気にしなくても良いと思います．まあ，数学的潔癖症なら別ですが. . . それよりも具体的なベクトル空間で，加法やスカラ倍，独立性や基底の概念がどのように使われているか，ということを見てください.

質問： $o(x)$ は線形で出てくると，任意の x で 0 になる関数，微積分だとスモールオーダーと違うものとして扱われていますが，それは場面によって違うのですか? 見た目に明確な違いがないような気がするのですが. . . .

お答え： 前期からずっと申し上げておりますが，数学の記号の多くは「文脈依存」です.

質問： 基底の組は有限個存在するのですか?

お答え： この講義では「基底の組」という言葉は使っていませんが，この語で何を表しているつもりでしょう．基底 $A := \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$，もうひとつの基底 $B := \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ に対して組 (A, B) のこと?

質問： ベクトル空間と線形空間の 2 つの言葉の意味の違いはありますか.

お答え： ない. 講義資料 1, 定義 1.1 参照.

質問： 基底をもたない (there exists no basics) と書いてありますが, 正解は "there're no exists basics" ではないでしょうか.

お答え： いいえ. basics は basis の間違い. また, 後者の文では活用形の動詞 are と exists が 2 つ含まれていて文法上正しくありません.

質問： $\alpha(x) = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ と $\beta(x) = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ は講義のとき覚えた方がいいと言いましたが, これ以外, 覚えた方がいい式はまだありますか？とくに 1 年生で役に立つ式があれば教えてください.

お答え： 沢山あるので, でてきたときに言及します. たぶん雑談ぽく紹介することになると思います.

■問題

質問： 問題 2-3 と 2-4 の証明の違いがわかりません.

お答え： 問題 2-3 は $\mathbb{R}^n$ というとても具体的なベクトル空間について, 2-4 は一般のベクトル空間を考えています.

質問： 2-11 ● V は有限次元か? という問いが分かりません. $a_{n+2} + 2a_n + a_n = 0$ より $\boldsymbol{a}_j$ $(n \geqq 2)$ は 1 次独立ではなく, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_0$ が 1 次独立. $\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$ について $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ だから V は有限次元だと思ったのですが, おそらく間違っているので, 問に答えるための方針を教えていただければと思います.

お答え： $\boldsymbol{a}_j$ っていうのはなんでしょう. 問題には現れていない記号ですね. V の一つの要素はひとつの数列ですから, 無限個の項をもちます. ここを間違えないでください. そして, 問題に与えられている a_j (細字であることに注意) は数列 $\boldsymbol{a} = \{a_j\}$ の一つ一つの成分です. あなたがいっている $\boldsymbol{a}_j$ が a_j のことだとすると, それらの一次独立性は意味がありません.

問題の答えは次の通り：

- $\boldsymbol{x} = \{x_j\}$ を $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$ で帰納的に定義される <u>ひとつの</u> 数列とする.
- $\boldsymbol{y} = \{y_j\}$ を $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_{=}0$ $(n = 0, 1, \dots)$ で帰納的に定義されるひとつの数列とする.
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ である.
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は一次独立.
- $V = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ である. 実際 $\boldsymbol{a} = \{a_j\} \in V$ ならば $\boldsymbol{a} = a_0\boldsymbol{x} + a_1\boldsymbol{y}$ である.

質問： 2-11 の問題は, 漸化式を解き（中略）$V \ni \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について（略：具体的に計算）$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ などと示していくので方針は合っていますか?

お答え： 漸化式が解ける場合はそれでよいですが, とかなくても良いわけです. $\boldsymbol{a} = \{a_j\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_j\} \in V$ ならば

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n &= 0 \\ b_{n+2} + 2b_{n+1} + b_n &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (a_{n+2} + b_{n+2}) + 2(a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n) = 0$$

なので $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ (etc.) 微分方程式のときと同じですよね.

■その他

質問： なぜ英語で書くことが多くなったのですか.

お答え： 英語で行う講義を増やす（いわゆる国際化っていうやつです）ということが検討課題になっているので試して見ています. ご意見をいただきたい.

質問： 先生の話をきいてそういうもんんあのかぐらいの理解しかできませんが, 定義をおさえていれば大丈夫でしょうか?

お答え： そういうもんか, くらいで大丈夫だと思いますが, 問題にはアタックしてみてね.

質問： $[b_1, b_2, \dots, b_n]\lambda = [a_1, a_2, \dots, a_n]A\lambda$ 補題 2.5 で $A\lambda = 0$ は非自明な解をもたないと $\operatorname{rank} A = n \leqq m$ となるのがよく分からないです.

お答え： この順番に読めばいいのでしょうか. 太字の使い方なども含め, むちゃくちゃですね. で, 本文に書いてありますように補題 2.15, 2.14 からだと思いますが, これを読んでも分からないということでしょうか.

質問： 質問がなく誤りも見つけられないけど点数がほしいです. どうすればよいでしょうか

お答え： どうしようもありません.

3 線形写像・表現行列

■言葉の準備：写像 集合 X (定義域; a domain) のそれぞれの要素に集合 Y (値域; a target) の要素をひとつ対応させる対応の規則を (X から Y への) **写像** a map, a mapping という．

- 「f は集合 X から Y への写像である」ということを「$f\colon X \to Y$」と書く．
- 写像 $f\colon X \to Y$ によって，X の要素 x に対応する Y の要素を $f(x)$ と書く．
- 写像 $f\colon X \to Y$ が「$x \in X$ に対して $f(x)$ を対応させる」ということを $f\colon x \mapsto f(x)$（定義域・値域をを明示したいときは $f\colon X \ni x \mapsto f(x) \in Y$）と書く．矢印の形の違いに注意.
- とくに値域 Y が数の集合（$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の部分集合）のとき，たとえば写像 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を X 上の**関数** a function （実数値関数 a real-valued function）ということが多い．

定義 3.1. 写像 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ に対して次で定まる写像 $g \circ f\colon X \to Z$ を g と f の**合成写像** the composition という：

$$g \circ f\colon X \ni x \longmapsto (g \circ f)(x) = g\bigl(f(x)\bigr) \in Z.$$

定義 3.2. 集合 X の要素に対してそれ自身を対応させる写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を**恒等写像** the identity map という：$\mathrm{id}_X\colon X \ni x \mapsto x \in X$．定義域・値域が文脈から明らかなときには，$X$ を省略して単に id と書くこともある.

例 3.3. 写像 $f\colon X \to Y$ に対して $f \circ \mathrm{id}_X = f$, $\mathrm{id}_Y \circ f = f$.

定義 3.4. 写像 $f\colon X \to Y$ が

- **単射** injective または**１対１の写像**であるとは，$x_1, x_2 \in X$ が $f(x_1) = f(x_2)$ を満たすなら $x_1 = x_2$ が成り立つことである．
- **全射** surjective または**上への写像**であるとは，各 $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる x が少なくとも一つ存在することである．
- **全単射** bijective であるとは，全射かつ単射となることである．

注意 3.5. 写像 $f\colon X \to Y$ が単射であるための必要十分条件は「$x_1, x_2 \in X$ が $x_1 \neq x_2$ を満たすならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ を満たす」ことである．(定義の対偶をとればよい)

事実 3.6. 写像 $f\colon X \to Y$ が全単射ならば，任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = Y$ となる $x \in X$ が**ただ一つ**さだまる．このことから，新たな写像

$$g\colon Y \ni y \longmapsto \text{g(y)=}(f(x) = y \text{ となる } x) \in X$$

が得られる．この写像 g は

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

を満たしている．

2012 年 10 月 18 日 (2012 年 10 月 25 日訂正)

定義 3.7. 写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たすような写像 $g\colon Y \to X$ が存在するとき，g を f の**逆写像** the inverse といって $g = f^{-1}$ と書く．

事実 3.8. 写像 $f\colon X \to Y$ が逆写像をもつための必要十分条件は f が全単射となることである．このとき f^{-1} は事実 3.6 で与えた g である．

■数ベクトル空間の線形写像

定義 3.9 (テキスト 98 ページ)**.** 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が**線形写像** a linear map であるとは，次を満たすことである：

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ が成り立つ．
- 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．

とくに $m = n$ のとき，すなわち定義域と値域が一致するときは，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を**線形変換**，**1 次変換** a linear transformation とよぶこともある．

注意 3.10. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して

- $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ が成り立つ．実際，$f(\boldsymbol{o}) = f(0\boldsymbol{x}) = 0f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$.
- $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．実際，$f(-\boldsymbol{x}) = f((-1)\boldsymbol{x}) = (-1)f(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$.
- $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ に対して
$$f(\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k) = \lambda_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + \lambda_k f(\boldsymbol{a}_k)$$
が成り立つ．

例 3.11. $m \times n$ 型行列 A に対して
$$f_A\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$$
は線形写像である．これを，行列 A が定める線形写像という．

定理 3.12. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して，$f = f_A$ となる $m \times n$ 行列 A が (唯ひとつ) 存在する．ただし f_A は例 3.11 で与えた行列 A が定める線形写像である．

> **証明：** $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル（例 2.3 参照）として，$\boldsymbol{a}_j := f(\boldsymbol{e}_j) \in \mathbb{R}^m$ $(j = 1, \dots, n)$, $A := [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$ とおくと A は $m \times n$ 行列である．いま，$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書けるから，f の線形性から
> $$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = f_A(\boldsymbol{x})$$
> となる．

すなわち $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像は例 3.11 ですべて尽くされる．定理 3.12 で与えられる行列 A を線形写像 f の**表現行列**という[*1]．

[*1] この節の後半の言葉で言えば**標準基底に関する**表現行列．

例 3.13. 恒等変換 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は線形変換で，その表現行列は m 次の単位行列である．

命題 3.14.
- 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ の表現行列をそれぞれ A, B とすると，$g\circ f$ の表現行列は BA である．
- 線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が全単射ならば，その表現行列 A は n 次の正則行列で，f^{-1} は A^{-1} を表現行列にもつ線形変換である．

証明： 前半：$(g\circ f)(\boldsymbol{x}) = g\bigl(f(\boldsymbol{x})\bigr) = g\bigl(A\boldsymbol{x}\bigr) = B\bigl(A\boldsymbol{x}\bigr) = (BA)\boldsymbol{x}$. 後半：$f$ が全単射なら逆写像 f^{-1} が存在する．さらに f^{-1} は線形写像である．実際 $f^{-1}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{x}_1$, $f^{-1}(\boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{x}_2$ とおくと，$f^{-1}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$. ここで $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ だから $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = f^{-1}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$ (ここで “f^{-1} が存在することを用いてる)．スカラ倍についても同様なことが言えるので f^{-1} の線形性が言えた．そこで f^{-1} の表現行列を B とすると，$f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = \mathrm{id}$ であることと，例 3.13 から $AB = BA = I$.

■ベクトル空間の線形写像　以下，V, W を ($\mathbb{R}^n$ やその部分空間とは限らない) ベクトル空間とする．

定義 3.15. ベクトル空間 V から W への写像 $f\colon V \to W$ が**線形写像** a linear map であるとは，(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, (2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ が成り立つことである．とくに $W = V$ のとき，線形写像 $f\colon V \to V$ は V の**線形変換** または**１次変換** a linear transformation とよばれることがある．

例 3.16. 数列全体の空間 $\mathcal{S}$ (例 1.5 参照) の要素 $\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ に対して $s(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}$, $S(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}$, $\delta(\boldsymbol{x}) \in S$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
s(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{y} = \{y_j\}_{j=0}^{\infty}, & y_j &= x_{j+1} & &(j = 0, 1, 2, \dots),\\
S(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{z} = \{z_j\}_{j=0}^{\infty}, & z_j &= \sum_{l=0}^{j} x_l & &(j = 0, 1, 2, \dots),\\
\delta(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{w} = \{w_j\}_{j=0}^{\infty}, & z_j &= w_{j+1} - w_j & &(j = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

で定めると，s, S, δ はそれぞれ $\mathcal{S}$ の線形変換である．

例 3.17. 正の整数 r に対して，実数全体で定義された実数値 C^r-級関数全体のなすベクトル空間 $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ (例) の要素 f に対して $D(f)$ を $D(f)(x) = f'(x)$ により定めると，$D(f)$ は C^{r-1}-級の関数である．したがって，写像 $D\colon \mathcal{C}^r(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{r-1}(\mathbb{R})$ が定義されるが，これは線形写像である．このことを**微分の線形性** ということがある．

とくに，任意の正の整数 r に対して C^r-級であるような関数を C^∞-級という．実数全体で定義された実数値 C^∞-級関数全体の集合を $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ と表すことにすれば，$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数全体の集合 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間になる．

実際，$f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ならば任意の正の整数 r に対して $f, g \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ なので，例 1.11 から $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) は $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ の要素．ここで r は任意だったから $f+g$, $\lambda f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

とくに $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ なら $Df = f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ なので $f \mapsto f'$ は $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ の線形変換である．

■表現行列　以下，ベクトル空間 V，W の次元は有限であるとし，$n := \dim V$, $m = \dim W$ として，V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, W の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ をそれぞれとっておく．すると

ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{a}_n = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

となるスカラ $x_1, \dots, x_n$ がただひとつ存在する．これを $\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する**成分** components という．

ここで V は $\mathbb{R}^N$ やその部分空間とは限らないことに注意しておく．したがって $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$ は普通の意味で行列であるとは限らない．

同様に $\boldsymbol{y} \in W$ も $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + y_m\boldsymbol{v}_m$ と表すことができる．

ここで，線形写像 $f\colon V \to W$ を考える．V の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ のうち一つのベクトル $\boldsymbol{a}_j$ をとると，$f(\boldsymbol{a}_j) \in W$ だから

$$f(\boldsymbol{a}_j) = \alpha_{1j}\boldsymbol{v}_1 + \dots + \alpha_{mj}\boldsymbol{v}_m = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]\begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix} \qquad (\alpha_{jk} \text{ はスカラ})$$

と書くことができる．これらを全て並べると

$$[f(\boldsymbol{a}_1), \dots, f(\boldsymbol{a}_n)] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]A \qquad \left(A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}\right) \tag{3.1}$$

と書くことができる．式 (3.1) で現れる A を，

線形写像 f の，基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する**表現行列** the matrix representation

という．このとき

$$f\left([\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

となっている．

例 3.18. $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ （例 2.3 参照) は $\mathbb{R}^n$ の基底をなす．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底** the canonical basis という．すると，定理 3.12 で与えた線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列は，ここでの言葉を使うと “f の，$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の標準基底に関する表現行列” ということができる．

例 3.19. 実数を係数とする高々 k 次の多項式で表される関数全体からなる線形空間 $\mathcal{P}^k$ (例 1.12 参照) を考える．$f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$,..., $f_k(x) = x^k$ とおくと，$\{f_0, \dots, f_k\}$ は $\mathcal{P}^k$ の基底になる（確かめよ；1 次独立性は例 1.16)．

いま，正の定数 k に対して $F\colon \mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^{k-1}$ を $F(f)(x) = f'(x)$ とおくと F は線形写像である．とくに $F(f_k) = f^{k-1}$ $(k \geqq 1)$，$F(f_0) = o$ だから，F の基底 $\{f_0, \dots, f_k\}$, $\{f_0, \dots, f_{k-1}\}$ に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

である．

■線形変換の場合　有限次元ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V\to V$ の定義域 V と値域 V は同じ集合だから，同一の基底をとるのが自然である．線形変換 f の定義域の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$, 値域の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ に関する表現行列を単に

線形変換 $f\colon V\to V$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ に関する表現行列

という．ベクトル空間 V の次元が n のとき，V の線形変換の表現行列は n 次正方行列である．

例 3.20. 例 3.19 で $\mathcal{P}^{k-1}\subset\mathcal{P}^k$ が成り立つので，F は $\mathcal{P}^k$ の線形変換と思うこともできる．このとき，F の基底 $\{f_0,\dots,f_k\}$ に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & k\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

である．

■基底変換　この節では線形写像は現れない．ベクトル空間 V の次元を n，$\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ を V の基底とする．このとき，V の n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対して

$$[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]A \qquad (A\text{ は }n\text{ 次正方行列}) \tag{3.2}$$

を満たす正方行列 A が存在する．とくに $\{\boldsymbol{v}_j\}$ が V の基底であるための必要十分条件は A が正則となることである．

実際，$\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が基底であることから，各 $\boldsymbol{v}_k$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の 1 次結合で表されるので (3.2) のような A は存在する．ここで $\lambda={}^t[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$ に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\dots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{o}\quad\Leftrightarrow\quad[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]\lambda=\boldsymbol{o}\quad\Leftrightarrow\quad[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]A\lambda=\boldsymbol{o}\quad\Leftrightarrow\quad A\lambda=\boldsymbol{o}$$

となる．最後の同値関係は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ が 1 次独立であることによる．この最後の方程式が自明な解しか持たないための必要十分条件は A が正則なことだから $\{\boldsymbol{v}_j\}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は A が正則となることである．このことから，$\{\boldsymbol{v}_j\}$ が基底ならば A は正則．逆に A が正則なら，任意の $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+\dots+x_n\boldsymbol{a}_n\in V$ は

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]A^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

なので $\boldsymbol{x}$ は $\{\boldsymbol{v}_j\}$ の 1 次結合で表される．したがって $V=\langle\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\rangle$ となるので $\{\boldsymbol{v}_j\}$ は基底である．

このとき，3.2 の A を基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ への**基底変換行列**という．

例 3.21. 次で定義される $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ はともに $\mathbb{R}^3$ の基底を与える：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\12\end{bmatrix}.$$

このとき，$A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$, $B=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]$ とおくと，これらは 3 次の正則行列で，

$$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]=B=AA^{-1}B=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]A^{-1}B$$

なので $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ への基底変換行列は $A^{-1}B$ である．

例 3.22. 例 3.19 で定義した多項式の空間，とくに $\mathcal{P}^3$ を考える．組 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ $(f_j(x) = x^j)$ は $\mathcal{P}^3$ の基底となり，$\dim \mathcal{P}^3 = 4$ であることはすでにみた．一方,

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x - 1, \quad g_2(x) = (x-1)^2, \quad g_3(x) = (x-1)^3$$

とおくと

$$[g_0, g_1, g_2, g_3] = [f_0, f_1, f_2, f_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．したがって $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ も $\mathcal{P}^3$ の基底であり，上の式の行列が基底変換行列となっている．

問題

3-1 例 3.11 を確かめなさい.

3-2 例 3.13 を確かめなさい.

3-3 命題 3.14 を示しなさい.

3-4 テキスト 111 ページ 4.7, 4.8; 112 ページ 4.9; 113 ページ 4.18.

3-5 例 3.16, 3.17, 3.19, 3.20 を確かめなさい.（ヒント：難しいことは考えなくて良い．ただ定義を満たしていることを確かめればよい.）

3-6 例 3.21 の $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + y_3\boldsymbol{b}_3$$

と表すときに，y_1, y_2, y_3 を x_1, x_2, x_3 で表しなさい.（ヒント：行列表示をするとわかりやすい）

3-7 例 3.22 を確かめなさい.

3-8 ベクトル空間 V の 2 つの基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$，$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ の間の基底変換行列を P, ベクトル空間 W の 2 つの基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$，$\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$ の間の基底変換行列を Q とする：

$$[\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n] = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]P, \qquad [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]Q.$$

ここで，線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$, $\{\boldsymbol{v}_j\}$ に関する表現行列を A, 基底 $\{\boldsymbol{b}_j\}$, $\{\boldsymbol{w}_j\}$ に関する表現行列を B とすると $B = Q^{-1}AP$ が成り立つ.

3-9 実数 θ に対して行列

$$A := \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

で表される線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える．すなわち，線形変換 f の, 基底 $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する表現行列が A である．いま，$\boldsymbol{a}_1 = {}^t\!\left[\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right]$ $\boldsymbol{a}_2 = {}^t\!\left[-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right]$ とするとき

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底であることを確かめなさい.

(2) 線形変換 $f = f_A$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ に関する表現行列を求めなさい.

(3) f の図形的な意味を述べなさい.