2012 年 10 月 25 日 (2012 年 11 月 1 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 4

前回までの訂正

- 講義資料 3, 5 ページ 定義 3.2 の最後：と書くことをもある $\Rightarrow$ と書くこともある
- 講義資料 3, 5 ページ 注意 3.5, 2 行目：$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- 講義資料 3, 6 ページ 11 行目：a liner transformation $\Rightarrow$ a linear transformation
- 講義資料 3, 6 ページ, 注意 3.10, 最初の項目：$f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ 成り立つ $\Rightarrow$ $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ が成り立つ
- 講義資料 3, 8 ページ, 下から 2 行目/9 ページ, 下から 8 行目

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}
$$

授業に関する御意見

- むずかしそうな演習問題を授業中にやってほしいです．
  山田のコメント： 実はだいたいやっているんです．あるいは講義資料の中にヒントが入っているんです．
- 青色のチョークが見えにくいです．もしよければ他の色のチョークを使っていただけるとうれしいです．
  山田のコメント： ごめんなさい．気を付けます．
- 先生はいつも元気ですね．とても良いモチベーションになると思います．　**山田のコメント：** そんなに元気でもないです．
- 英語での表記にもなれてきました．　**山田のコメント：** よかった．
- 授業に英語を混ぜるなら，この紙も英語で書かせてみては? みんなめんどくさがって出さないから先生が楽になる. . . かも?
  山田のコメント： 文法とか綴りとか直さなければならないので，手間が増える．って日本語でも同じだった．
- 日本語の板書は字が下手だし書くのがとてもつらいです．英語はいいですね．　**山田のコメント：** ま，楽ですね．
- 筆記体が書けなくて困ってます．　**山田のコメント：** 読めればよいのでは?
- 国語力に自信がない．　**山田のコメント：** me, too
- 何時の間に暑さが去っていた．　**山田のコメント：** すぐ寒くなりますね．
- 折りたたみのカサを持ってきたので雨が降っても安心. . . と思っていたが壊れていて使えなかった．残念!
  山田のコメント： それは残念．機材の点検を怠らないのは工学系の基本的なしつけだよね．
- 先週の金曜日に病欠してしまい，紙を出せませんでした．せっかく質問考えたのに!!
  山田のコメント： 残念です．前の回の質問も同じ紙に書いて頂いて結構です．
- すいません．先々週に提出物があることを今回の講義資料のコメント欄をみて気が付きました．お手数をかけて申しわけありません．
  山田のコメント： ということすら言ってきていないひとが沢山いるんだけどいいんですかね．
- 具体的な内容〜と前にありましたが，どんな問題が解ければよいのか，またその解法の具体的な内容を知りたいということではないでしょうか．
  山田のコメント： そういうのは具体的とは言わない．皆さんは「具体的な問題」すなわち工学的・科学的な問題に数学を適用しよう，という立場でしょう．そういうときの「具体的な問題」は決して試験問題ではないんです．そんなものはらくに通りすぎてその上で具体的な問題にアタックして欲しい．東工大生ならそれくらい期待されて当たり前では?
- 今日の質問は長くて打ち込むの大変かもしれませんが，頑張って下さい．　**山田のコメント：** 嫌がらせ?
- ちこくしてしましました．ごめんなさい．　**山田のコメント：** いいえ．
- これより難しくなると困ります．　**山田のコメント：** そうですか．
- 60 点だけど単位さえくれれば関係ないよね．　**山田のコメント：** 何と何の関係?

質問と回答

質問： 基底変換の場合，座標も変わってしまいますが，あらたな座標を求める方程式はどうなりますか? $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_n\}$ の基底に対する座標を $(x_1, \dots, x_n)$ とすると，$\mathcal{B} = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ の基底に対する座標は? ここで $[e'_1, \dots, e'_n] = [e_1, \dots, e_n]A$

お答え： この講義では，ベクトルの基底に関する**成分**と読んで，座標とはよんでいません（講義資料 3，8 ページ）．さて，ベクトル空間 V のふたつの基底 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ の間の基底変換行列が P であるとしましょう：$[\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n] = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]P$ ここで P は n 次正則行列．ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = \beta_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + \beta_n\boldsymbol{b}_n = [\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

と書いた時 ${}^t[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, ${}^t[\beta_1, \dots, \beta_n]$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関する成分というのでした（講義資料 3, 8 ページ）．ご質問は，この $[\alpha_j]$ と $[\beta_j]$ の関係ですね．上の式をじっとみているとわかります：答えは

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}.$$

質問： $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R}) \Rightarrow f(x \cdot 1) = f(1)x = ax$ $(a = f(1))$ といったことが黒板に書かれていましたが，f の括弧内には x が残っているはずなのにどうして $f(x \cdot 1) = f(1) \cdot x$ と x が外に出たのですか?

お答え： ちょっと記号が混乱したかもしれませんね．最初の式の λ に x を，x に 1 を代入してみてください．

質問： $X \to Y$ が逆写像を持つための必要十分条件は f が全単射であることですが，$x \mapsto x^2$ は全単車でないので $x^2 \mapsto x$ は逆写像ではないということですが，逆写像とは逆関数とは違うものですか．$x \mapsto x^2$ の逆関数は存在するので，違うものなのでしょうか．たとえば，$x \mapsto \pm\sqrt{x}$ は逆写像ではないのですか．

お答え： 写像の定義（講義資料 3, 5 ページ）のように X のそれぞれの要素に Y の要素を**ひとつ**対応させるのが写像，とくに値域 Y が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の部分集合であるときに関数といいます．ご質問の $x \mapsto \pm\sqrt{x}$ は x に対して（一般に）2 つの実数を対応させている（$\pm\sqrt{x}$ は一つの数ではない）ので写像にはなりません．しかし $X = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqq 0\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geqq 0\}$ とすれば $f\colon X \ni x \mapsto f(x) = x^2 \in Y$ は全単射となり，逆写像 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ が存在します．すなわち「逆写像の存在」は定義域・値域をどうとるかに依存します．

質問： 恒等写像と全単射には何らかの関係がありますか．

お答え： 恒等写像は全単射ですが，逆は成り立ちません．恒等写像は特別な写像の固有名詞ですが，全単射は写像のもつ性質です．

質問： $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ は自明ですか？

お答え： 逆写像の定義：写像 $f\colon X \to Y$ に対して $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$ となる写像 g を f^{-1} と書く．もし X と Y が異なる集合ならば，$f \circ f^{-1}$ と $f^{-1} \circ f$ は定義域が違いますから，同じ写像ではありません．もし $Y = X$ ならば $f \circ f^{-1}$ も $f^{-1} \circ f$ も id_X となるので（そうなるものを逆写像とよんでいる）自明です．

質問： 配布資料の p 9 で，線形変換 $f\colon V \to V$ で定義域 V が値域 V となっていますが，言葉が変わることにはどのような意味があるのでしょうか．

お答え： 一般に線形写像 $f\colon V \to W$ を行列表示する場合は，V と W の基底をとって，それに関する成分を用います．しかし，線形変換を考えるときは定義域と値域に同じ基底をとっておくのが自然でしょう．このように考える枠組がすこし違います．後半で扱う「固有値問題」は定義域と値域が同じベクトル空間でないと意味がないので，一般の線形写像ではなく特殊な線形変換を考えるのは意味があるのです．

質問： 講義資料の命題 3.14 から「線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の表現行列 A が非正則ならば，写像 f は全単射でない」ことは言えるのですか? また同時に「線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の表現行列が正則ならば写像 f は全単射である」ということは正しいのですか．

お答え： 正しいです．前半：全単射ならば正則の対偶ですので，言えます．後半：表現行列を A とすると A^{-1} に対応する線形写像 g は $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ を満たす．したがって，事実 3.8 より f は全単射．

質問： $Df = a_0Df_0 + a_1Df_1 + a_2Df_2 + a_3Df_3 =$ (以下略) でなぜ $Df_0 = o$, $Df_1 = f_0$, $Df_2 = f_1$, $Df_3 = 3f_2$ になるかわかりません．

お答え： この文脈で f_j や D の定義は何だったでしょう．$f_j(x) = x^j$, $Df(x) = f'(x)$ ですよね．だから，単純に微分公式です．

質問： 表現行列の例で，$Df(x) = f'(x)$，$f_i(x) = x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$ として $Df = a_0Df_0 + a_1Df_1 + a_2Df_2 + a_3Df_3$ を考えたとき，講義では $[Df_0, Df_1, Df_2, Df_3]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ と変形してましたが，先に微分をしてしまって $Df = a_1f_0 + 2a_2f_1 + 3a_3f_2$ とすることはできますか?

お答え： 「することができる」というのはどういう意味でしょう．もちろん Df をご質問のように求めることはできます（高等学校で習ったことです）．

質問： 授業中の $Df(x) = f'(x)$, $D\colon \mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^{k-1}$ とした問題で $Df = [f_0, f_1, f_2]\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ という結果を出すために $\mathcal{P}^2 \ni g = [f_0, f_1, f_2]\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}$ というもの途中で（原文ママ：というものを途中で，か）書いた意味はなんですか? 結果に “b_0, b_1, b_2” がふくまれていないので蛇足ではないでしょうか．もし意味があるのであれば，試験の時も明記しないといけませんか?

お答え： $\mathcal{P}^2$ の要素はこの形にかけるということを注意しただけ．試験の時に明記しないと（なんていうつまんない）質問には，明記して欲しい場合は問題から読み取れるようになっています．（読み取れなかったらどうする，という質問には，読み取れないのが悪いとうお答えしかできません．もちろん，採点された答案を見てクレイムをつけることはできます．もし，答案返却を前期同様に行うなら．）

質問： 講義の最後で $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{a}_2) = [f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2)]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]B\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$, $B = P^{-1}AP$ 線型変換 P の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ に関する表現行列 $B = \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1$, $f(\boldsymbol{a}_2) = -\boldsymbol{a}_2$ とありましたが，わからないことが 3 つほどあるのでお答えください．

(1) $[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2)]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]B\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$．これは $A[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = A[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]P^{-1}AP\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$ で等しくないと思う．

(2) $B = P^{-1}AP$ はどう式変形をすれば良いのかわからない．

(3) $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1$, $f(\boldsymbol{a}_2) = -\boldsymbol{a}_2$ にどうしてなるのかわからない．$A\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\\\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$

お答え： (1) $P = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ とおいているはずだから等しいと思う．(2) 基底変換により表現行列がどう変わるかの議論は，問題 3-8．具体的に与えた P, A に対して $P^{-1}AP$ がご質問にある B になるのは単純計算．(3) 三角関数の加法定理を使うと右辺は $\boldsymbol{a}_1$ そのものになってませんか?

質問： 授業中の最後の部分で $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1$, $f(\boldsymbol{a}_2) = -\boldsymbol{a}_2$ とありますが，これはどのように導かれたのでしょうか．$f(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{a}_2)$ からお願いします．

お答え： 「からお願いします」がおかしい．「$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2$ とすると，$f(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{a}_2)$ が成り立つ（これは単に f の線形性）．ここで $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1$, $f(\boldsymbol{a}_2) = -\boldsymbol{a}_2$ だから...」と続きます．すなわち，あなたが「...から」といったことと，ご質問の内容は直接論理的な関係はありません．ご質問の内容は「この例では f, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を具体的にどうおいたのか」を考えればすぐわかります．ただし三角関数の加法定理が必要です．

質問： $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の線形変換で $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\\cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{a}_1) +$

$\alpha_2 f(\boldsymbol{a}_2) = [f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2)]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]B\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$ の後，「$B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ となる」のですか，それとも「$B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ とする」のですか．前者ならどうしてそうなるのか分かりません．

お答え： 具体的な線形写像 f を与えれば表現行列は決まるわけですから「となる」です．どうしてそうなるかは，f がどういう写像になるかによります．この場合は何でしたっけ．ちなみに，このとき挙げた例で B がご質問のような行列になるのは，$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1$, $f(\boldsymbol{a}_2) = -\boldsymbol{a}_2$ だからです．

質問： 3-8 は $f([a_1, \dots, a_n]) = [v_1, \dots, v_n]A$ と $Pf([a_1, \dots, a_n] = f[b_1, \dots, b_n]) = [w_1, \dots, w_m]B = [v_1, \dots, v_m]QB$ から $P[v_1, \dots, v_m]A = [v_1, \dots, v_m]QB$ を求めればよいのですか?

お答え： 途中解釈のしようがない式が入っています．$P[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]$ (問題は太字になっています）はなんでしょう．どうやって計算するのでしょう．$\boldsymbol{v}_j$ は一般に列ベクトルとは限らない（関数だったり数列だったり）なので，$P\boldsymbol{v}_j$ みたいなものは意味があるとは限りませんが．というわけで「違います」．表現行列の定義式から得られる関係式（講義資料 3, 8 ページの中ほどの式）から

$$f\left([\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\right) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]A\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}, \qquad f\left([\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\right) = [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m]B\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

となります．ここで，基底変換行列と第一式をを用いて，第二式の左辺を変形すると，

$$\begin{aligned} f\left([\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\right) &= f\left([\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]P\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\right) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]AP\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\\ &= [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m]Q^{-1}AP\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

これから $B = Q^{-1}AP$ を得る（$\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ の１次独立性を用いていることに注意せよ．

質問： p. 7–8 の表現行列のところについて，p. 8 の 5 行目の $\mathbb{R}^N$ のところがよく分かりません．$\mathbb{R}^N$ のところが $\mathbb{R}^n$ だと，どこがおかしいのでしょうか. . . .

お答え： おかしくありません．m でも構いません．いろんな数字が入るのですが，ここでは n はベクトル空間 V の次元でした．n 次元ベクトル空間にはいろいろなものがありますが，$\mathbb{R}^n$ の n 次元部分空間は $\mathbb{R}^n$ しかないので，「V が $\mathbb{R}^N$ の部分空間」と言った場合，自明でないのは $N > n$ のときです．だから，適当な高い次元の $\mathbb{R}^N$ というつもりで N を用いました．

質問： 若干 off topic かもしれませんが，“f is a linear mapping” などと書くと分の頭が小文字になるのが気になる. . .

お答え： おっしゃる通りで bad style です．一般に欧文の書き言葉では，文頭に式や記号が来るのは良いスタイルでないと言われています．ですので，きちんと書く場合は “A mapping f is linear” などとするのが普通です．黒板に書くのはカジュアルなスタイルであることが多いので，ご質問のような書き方もしますが．

質問： 「Rem」ってどういう意味ですか．　**お答え：**Remark

質問： 線形写像は，例えば座標系で $R^3 \to R^2$ への変換なら，空間上の線を平面に投影したものという認識でいいのでしょうか．

お答え： 「認識」で何をさしているかわかりませんが，「投影」という言葉をきちんと数学的に表すとどうなるでしょう．

質問： 2×2 行列については，平面上で図形的意味を述べることができますが，3×3, 4×4 行列についても似たように考えることはできるのでしょうか．

お答え： 図形的意味という言葉で何をさすかによります．なれてくれば高次元の図形も想像できるので，似たような意味は考えることができます：たとえば $\mathbb{R}^4$ の超平面に関する折り返し，などという言葉は普通に使います．

4 次元定理

■線形写像の像と核 ベクトル空間 V からベクトル空間 W への線形写像 $f\colon V \to W$ に対して

$$\operatorname{Ker} f := \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}, \qquad \operatorname{Im} f := \{\boldsymbol{y} \in W \mid \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \text{ となるような } \boldsymbol{x} \in V \text{ が存在する }\},$$

とおき，それぞれ f の**核** the kernel, **像** the image という．

補題 4.1. 線形写像 $f\colon V \to W$ に対して $\operatorname{Ker} f$ は V の部分空間，$\operatorname{Im} f$ は W の部分空間である．

まず $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ は空集合ではないことに注意する．
つぎに，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} f$ とすると，$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ すなわち $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} f$．さらに $\boldsymbol{x} \in V$ とスカラ λ に対して $\lambda\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$ (演習問題).
また，$\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{Im} f$ とすると，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in V$ で $f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$, $f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$ となるものがとれる．すると $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ だから，$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{Im} f$．同様に $\lambda\boldsymbol{y} \in W$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} f)$.

例 4.2. 行列 A が $m \times n$ 型のとき，線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ を考えることができる．このとき，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f_A &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\} = \text{同次連立一次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ の解} \\
\operatorname{Im} f_A &= \{\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle \\
&= \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \text{ が生成する } \mathbb{R}^m \text{ の部分空間}
\end{aligned}$$

である．ただし $A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$.

例 4.3. いま

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

として，例 4.2 の $m = 4, n = 5$ の場合を考える．この行列 A に行基本変形を施して階段行列 B をつくると，

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 3$．この形から $\boldsymbol{x}_1 = {}^t[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0]$, $\boldsymbol{x}_2 = {}^t[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -1, 1]$ とおくと

$$\operatorname{Ker} f_A = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\right\} = \{\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$$

だが，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立だから，これらは $\operatorname{Ker} f_A$ の基底をつくる．すなわち，$\dim \operatorname{Ker} f_A = 2$.

一方 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5]$ とおくと，対応する階段行列の形から，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5\}$ は 1 次独立で，$\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ はそれらの 1 次結合で表されるから，$\operatorname{Im} f_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5 \rangle$. とくに $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5\}$ は $\operatorname{Im} f_A$ の基底で，$\dim \operatorname{Im} f_A = 3 = \operatorname{rank} A$.

例 4.4. 例 4.2 で，一般に $\dim \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A$，$\dim \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rank} A$ である．

2012 年 10 月 25 日 (2012 年 11 月 1 日訂正)

証明： 行列 A に行 (列) 基本変形を施す，すなわち左（右）から正則行列をかけることにより，

$$PAQ = C = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \qquad (P\ (Q) \text{ は } n \text{ 次}\ (m \text{ 次}) \text{ 正則行列，} I_r \text{ は } r \text{ 次単位行列，} r = \operatorname{rank} A)$$

の形にできる (補題 2.15 の証明参照).
$\operatorname{Im} f_A$ の次元を求めよう：$A{:=}[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$, $B = [\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n] := AQ^{-1}$ とすると，Q が正則行列であることから，

$$\operatorname{Im} f_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n \rangle$$

が成り立つ（演習問題）．ここで $[\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n] = AQ = P^{-1}C$ なので，$\boldsymbol{b}_j = P^{-1}\boldsymbol{e}_j\ (1 \leqq j \leqq r)$, $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{o}\ (j > r)$, ただし $\{\boldsymbol{e}_j\}$ は $\mathbb{R}^m$ の標準基底．とくに $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r\}$ は 1 次独立なのでこれらが $\operatorname{Im} f_A$ の基底となる．
一方,

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \quad &\Leftrightarrow \quad P^{-1}CQ^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad CQ^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \\ &\Leftrightarrow \quad Q^{-1}\boldsymbol{x} = \alpha_{r+1}\boldsymbol{e}'_{r+1} + \dots + \alpha_n \boldsymbol{e}'_n \qquad (\alpha_{r+1}, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

ただし $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底．したがって $\operatorname{Ker} f_A = \langle Q\boldsymbol{e}_{r+1}, \dots, Q\boldsymbol{e}_n \rangle$ となるが，とくに $\{Q\boldsymbol{e}_{r+1}, \dots, Q\boldsymbol{e}_n\}$ は $\operatorname{Ker} f_A$ の基底となる．

補題 4.5. ベクトル空間 V から W への線形写像 $f\colon V \to W$ が単射であるための必要十分条件は $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{o}\}$ となることである．

証明： 線形写像の性質 $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ から，f が単射なら “$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$” なので必要性が示せる．十分性: $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{o}\}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{o}$ のみだから，$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2)$ ならば $f(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{o}$ したがって，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$.

■次元定理　次は，例 4.4 が一般のベクトル空間の間の線形写像に対しても成り立つことを示している：

定理 4.6 (次元定理 the rank-nullity theorem)**.** 有限次元ベクトル空間 V, W の間の線形写像 $f\colon V \to W$ に対して,

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

が成り立つ．

とくに $\dim \operatorname{Im} f$ のことを線形写像の**階数** rank ということがある．

証明： 基底を固定して f の表現行列に対して例 4.4 と同じことをすればよい．
あるいは次のように示すこともできる（テキストの証明）：まず $\operatorname{Ker} f$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s\}$ と $\operatorname{Im} f$ の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_t\}$ をとる．各 $\boldsymbol{w}_j$ は $\operatorname{Im} f$ の要素だから $f(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{w}_j$ となる $\boldsymbol{x}_j \in V$ をとることができる．すると $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_t\}$ は V の基底になる．

問題

4-1 補題 4.1 の証明を完成させなさい．写像 f の線形性を用いるのはどこか．
4-2 補題 4.5 の証明を完成させなさい．写像 f の線形性を用いるのはどこか．
4-3 テキスト 112 ページ 4.10, 113 ページ 4.19, 4.20
4-4 例 4.4 の証明を完成させなさい．
4-5 次元定理 4.6 の結論の式に $\dim W$ が入っていないのはなぜか．
4-6 次元定理 4.6 の証明の概略（ここでは 2 つあげた）を完成させなさい（オプション）．