2012 年 11 月 1 日 (2012 年 11 月 8 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 5

前回までの訂正

- 講義資料 4, 1 ページの「授業に関するご意見」6 件目：各のが ⇒ 書くのが
- 講義資料 4, 6 ページ 5 行目：
  $A=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]$, $B:=[\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n]Q^{-1}$ とおくと
  ⇒ $A{:=}[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]$, $B{=}\ [\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n]:=AQ^{-1}$ とおくと

授業に関する御意見

- 風邪をひいてしまいました．先生は風邪をひかなさそうですね．
  山田のコメント： はい．〇〇は風邪引かないらしいので．
- 授業中に英語を使ってくれてありがたいです． **山田のコメント：** なるべくそうしたいと思っています．
- 英語が小さすぎて見えにくいので字自体を大きくしてもらえませんか？
  山田のコメント： なんとか try してみます．
- 最近四六時中眠いです． **山田のコメント：** me, too.
- 後期に入るとやる気がなくなるのは本当だった． **山田のコメント：** そうでしょう．
- “dim Ker” という新しい記号がいきなり出てきたかと思いびっくりしました．
  山田のコメント： そいういうのってありますよね．熟語の意味はまず単語に分解してから考える．
- 質問用紙は授業中にとったのが，今日忘れましたので OCW からプリントしました．
  山田のコメント： それで結構です．
- いつもありがとうございます． **山田のコメント：** どういたしまして．

質問と回答

■像と核

質問： 線形写像 $f\colon V\to W$ に対し $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ が空集合になることはないんですか?

お答え： $\operatorname{Ker} f$ は零ベクトルを要素に持ちます．$\operatorname{Im} f$ も零ベクトルを要素に持ちます．

質問： $B=\text{略}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ とし，Kernel は (略) と求められるが，B の image は一般的にどうやってもとめますか．

お答え： 例 4.3 のことですね．この場合，求めたいのは B の image ではなく，f_A の image です．この例の場合，$A=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_5]$ とおくと $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4\}$ は $\operatorname{Im} f_A$ の基底です．これは次のようにしてわかります：$B=[\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_5]$ とおく．このとき “階段行列の階段が一段下がるところ” に対応する $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_4\}$ は 1 次独立で，$\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_5$ はそれらの 1 次結合で書けるから，$\langle\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_5\rangle$ を生成する．したがって $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_4\}$ は $\langle\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_5\rangle$ の基底．ここで $PA=[\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_5]$ となる正則行列 P が存在する（行基本変形の性質）が，このとき $\boldsymbol{b}_j=P\boldsymbol{a}_j$．このことを用いると $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4\}$ は一次独立で $\langle\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_5\rangle$ を生成する（確かめよ）．

■次元定理

質問： 講義の最後の Example で $\dim V=3-\dim\operatorname{Im}F=3-1=2$ とありましたが，$\dim V=\dim\operatorname{Ker}F+\dim\operatorname{Im}F$, $\dim V-\dim\operatorname{Im}F=\dim\operatorname{Ker}F$, $\dim\ker F=3-1=2$ ではないですか? それとも $\dim V=\dim\operatorname{Ker}F$ ですか?

お答え： この例では V はどうおきましたか? 次元定理のステートメントの V (f の定義域) ではなかったと思いますが．

質問： 線形写像でないと次元定理は成り立たないですか? たとえば $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. この写像は線形ではないが，$\operatorname{Ker} f$ は yz 平面であり，$\dim \operatorname{Ker} f = 2$，また $\operatorname{Im} f$ は x 軸であり，$\dim \operatorname{Im} f = 1$. ここで $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 + 1 = 3 = \dim V$ は成り立っていますね.

お答え： ご質問の例だと少し違います.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} = \{{}^t[x, y, z] \mid x = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})\} \\ \operatorname{Im} f &= \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{{}^t[x, 0, 0] \mid -1 \leqq x \leqq 1\} \end{aligned}$$

いずれも $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっていません．たとえば $g({}^t[x, y, z]) = {}^t[x, y, x^2 - y^2]$ その像は曲面ですね．また $h({}^t[x, y]) = x^2 - y^2$ $(h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ とすれば “$\operatorname{Ker} h$” は原点で交わる 2 本の直線です．このように，一般に線形でない写像の像や核はベクトル空間にならないので，その次元が（現段階では）定義できません．したがって，次元定理はそのままの形ではなりたちません．“多様体 manifold”, “陰関数定理 implicit function theorem” などという言葉を用いて一般化することもできますが，この講義の範囲を超えます.

■問題

質問： 問題 4-5 についてですが，$\operatorname{Ker} f$ が $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s\}$, $\operatorname{Im} f$ が $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_t\}$ という基底をもつとして $f(\boldsymbol{c}_1) = \boldsymbol{b}_1$, $f(\boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{b}_2$, …, $f(\boldsymbol{c}_t) = \boldsymbol{b}_t$ で $\{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_t\}$ とすると，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s\}$ は f によって変換され $\boldsymbol{o}$ になるもので，$\{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_t\}$ は f によって 0 以外のベクトルになるものだから，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_t\}$ は V の基底であるので，W の基底は関係ないということでよろしいですか?

お答え： 大体証明を追っているみたいですが，この問題は「あなたがそれで納得できる」ならいいんです．本当にそれで納得できていますか? ちなみに講義ではどう説明したでしょう（説明したのですが）.

質問： 教科書 p. 113 4.20 は行列式を使って証明できますか?
f による線形写像を A, $\{a_1, \ldots, a_n\} = \boldsymbol{a}$ とおく．(1) 仮定より $|\boldsymbol{a}| \neq 0$. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を満たすには $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ のため $|A| \neq 0 \therefore |Aa| = |A| \times |a| \neq 0$ よって $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ も 1 次独立.

お答え： “行列式” を用いるのはよいですが，ここに書いてあることは言葉がめちゃくちゃです．“線形写像” は f であって A はその表現行列であるはずです．たぶん “$\boldsymbol{a}$” は行列を表しているようですが，この講義での一般的な記号の使い方ではありません．また，途中からでてくる a は未定義です．“よって” 以降が，その前の文からすぐに導かれるということがわかりません．もういちど自分で**意味を考えながら**，**正しい記号と言葉で**書きなおしてごらんなさい.

■わかりません

質問： 例 4.4 の証明で A を列基本変形していいのはどうしてですか.

お答え： 「列基本変形してはいけない」状況はどういうことでしたっけ．ここでは「行列 A に行基本変形と列基本変形をほどこすと，... の形になる」という事実のみを使っています．この事実は正しいわけですから，問題はないですね.

質問： 例 4.4 で $\operatorname{Im} f_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$ となることを証明することが問題 4-4 で求められていますが，方針が立ちません．左の等号は授業で習ったことを考えれば分かりますが，右の等号が成立する理由を教えて下さい.

お答え： 実はここに誤りがありました（「前回までの訂正」の項参照）．もとの版では $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ の定義が与えられていませんね．この修正された版で，以下を示せばよいわけです．(1) $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$，すなわち $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \subset \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$ を示す．(2) $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$，すなわち $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \supset \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$ を示す.

質問： 教科書 p 108 の定理 4.15 の証明で，5 行目の「$\sim$ $n = r + s$ を得る.」とありますが，なぜこのようにいえるかがわかりません.

お答え： 「基底を構成するベクトルの個数は基底のとりかたによらない（テキスト 93 ページ，定理 4.7）」「基底を構成するベクトルの個数をそのベクトル空間の次元という（テキスト 93 ページ））」「$\mathbb{R}^n$ の次元は n である（テキスト 93 ページ，例 20)」「テキスト 108 ページ，定理 4.15 の証明で $\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である（ということが示される)」「$\mathcal{C}$ を構成するベクトルの数は $r + s$ である」

質問： 基底の概念がよくわかりません．あたりまえに使われるものなので，一度詳しく教えて下さい．

お答え： ということを詳しくやったのが 10 月 11 日．実は前期にもやっている．その資料を良く読み返して，どこがわからないかを指摘して下さい．

質問： 基底の個数が次元数になるととっていいですか．

お答え： 以下の理由でよくないです．(1) 一般に（有限次元）のベクトル空間の基底は無限個あります．（基底の個数の数え方は，10 月 11 日の講義および前期に注意した通り）．(2) 次元数という語はこの講義では使っていません．あなたはこの語で「次元」を表しているのですか?

■ことば

質問： 必要十分条件の必要性，十分性というのを詳しく説明して下さい．

お答え： 「A ならば B」が成り立つとき，「A は B であるための十分条件, A is a sufficient condition for B」，「B は A であるための十分条件, B is a necessary condition for A」といいます．さらに「(A ならば B) かつ (B ならば A)」が成り立つとき「A は B であるための必要十分条件，A is a necessary and sufficient condition for B」あるいは「A と B は同値，A is equivalent to B」と言い，「$A \Leftrightarrow B$」と書きます．
「定理 : $A \Leftrightarrow B$」の証明は (1)「$A \Rightarrow B$」すなわち A が B のための十分条件を満たすこと（十分性）(2)「$B \Rightarrow A$」すなわち A が B のための必要条件を満たすこと（必要性）の 2 つの部分にわかれます．

質問： $f\left([\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]P\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\right)$ の $P\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$ の部分はスカラーとして考える，でよいでしょうか．

お答え： いいえ．P に列ベクトルをかけたものですから，列ベクトル，すなわち $\mathbb{R}^n$ の要素です．

質問： 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について，f がどのようなとき f は単射もしくは全射になるなど，一般的な関係はありますか?

お答え： 何と何の関係でしょうか．単射になるための必要十分条件は補題 4.15，全射になるための条件は $\operatorname{rank} f = m$.

質問： $\dim V < \infty$ を見て思ったのですが，「$-\infty < ○ < \infty$」のような不等式はどういう意図で抱えることが多いのでしょうか．単に「無限ではないよ」ということですか．この不等式を受験時に何度か目にしましたが，それほど必要ではないのではと感じました．

お答え： “$\dim V < \infty$” は単に無限次元でない，ということ．もちろん無限次元のベクトル空間は沢山あるから，この記述は意味があります．一方，$-\infty < x < \infty$ は $x \in \mathbb{R}$ と同じ意味で使うみたいです．高等学校の教科書ではあまり「集合と写像」の記号を使わないようにしているみたいなので，たとえば「$f(x) = \sin x$ で与えられる関数の定義域は $\mathbb{R}$」という代わりに「$f(x) = \sin x$ で与えられる関数の $-\infty < x < \infty$」といっているのです．

質問： “$\mathbb{R}^3 \ni v\ (\neq 0)$“ fix この「fix」の意味がわかりません．

お答え： 「固定する」すなわち，ベクトル $\boldsymbol{v}$ をひとつ取り，しばらくの間その $\boldsymbol{v}$ は決まったものと考える．

質問： 板書で $\dim \operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ のうち 1 次独立なものの “最大個数” と板書されていましたが，最大でないとり方は具体的にどういう状態をさすのでしょうか．

お答え： $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ をとると，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $\mathcal{E}$ の 1 次独立な組であるが，その要素の個数は $\mathcal{E}$ から選ぶことのできる 1 次独立なベクトルの最大個数 (すなわち 3) ではない．

質問： 核のイメージなんですが，像をとった後に 1 点に集まるから核ということでいいのですか?

お答え： 言葉のイメージということですか? イメージだけなら何でもいいです．いずれにせよ定義は大丈夫ですよね．

質問： $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ のとき “$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$” を日本語で説明すると，$f$ によって移されたベクトル $\boldsymbol{x}$ の本数と f によって移されなかったベクトル $\boldsymbol{x}$ の本数の和を表現しているということでよいですか?

お答え： 「ベクトルの本数」という語で何を表しているかがわかりませんが，もし日常語と同じいみなら，いずれも一般に「無限」になると思いますので，違います．日本語で表すと「線形写像の像の次元と核の次元の和は，定義域の次元に等しい」ということですが．

5 内積

■実ベクトル空間の内積　これからしばらくは，スカラが実数の場合と複素数の場合を分けて考える．ここではまず実ベクトル空間の内積を考察する．

定義 5.1 (テキスト 117 ページ)**.** 実ベクトル空間 V の**内積** an inner product, a scalar product とは，V の 2 つの要素 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対して実数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を与える対応の規則で，次を満たすものである：

(I-1) 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.
(I-2) 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.
(I-3) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
(I-4) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$, 等号が成り立つための必要十分条件は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

例 5.2 (標準内積)**.** $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, \dots, a_n]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, \dots, b_n]$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

と定めると，これは $\mathbb{R}^n$ の内積である．

実際, 定義 5.1 の (I-1)–(I-3) は容易に示される．さらに, $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, \dots, a_n]$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (a_1)^2 + \dots + (a_n)^2 \geqq (a_1)^2 \geqq 0$. また $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ ならば，各番号 j に対して $0 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq (a_j)^2 \geqq 0$ だから，$a_j = 0$ となり，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

ここで定義された内積を $\mathbb{R}^n$ **の標準内積** the canonical inner product という[*1].

例 5.3. ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2]$, $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1, y_2] \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 = {}^t\boldsymbol{x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

と定めると，(,) は $\mathbb{R}^2$ の内積を与える．

定義 5.1 の (I-1)–(I-3) はこの場合もやさしい．(I-4) は $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2]$ に対する次の式変形（平方完成）からわかる：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (x_1)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2)^2.$$

一般に，ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2]$, $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1, y_2] \in \mathbb{R}^2$ に対して実対称行列 A を用いて

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + b x_2 y_1 + c x_2 y_2 = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y} \qquad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right)$$

と定めると，$\langle\ ,\ \rangle$ が $\mathbb{R}^2$ の内積を与えるための必要十分条件は $\det A > 0$ かつ $\operatorname{tr} A > 0$ である．

例 5.4. たかだか k 次の多項式で表される関数からなるベクトル空間 $\mathcal{P}^k$（例 1.12 参照）の 2 つの要素 f, $g \in \mathcal{P}^k$ に対して

$$(f, g) := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

とおくと (,) は $\mathcal{P}^k$ の内積を与える．

2012 年 11 月 1 日 (2012 年 11 月 8 日訂正)

*1 前期の線形代数学第一では $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ の標準内積を "$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$" と表したが，今回はテキストに合わせて "$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$" という記号を用いる．"$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$" もしばしば用いられる．

■ベクトルの大きさ　ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとする．このとき，任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ は負でない実数だから，負でない実数

$$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \tag{5.1}$$

が定まる．これを（内積 $(\ ,\ )$ に関する）$\boldsymbol{a}$ の**大きさ** the length, the norm という．

命題 5.5. ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとき，その内積に関するノルム $\|\cdot\|$ は次を満たす：

(N-1) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して $\|\boldsymbol{a}\| \geqq 0$，等号が成立するための必要十分条件は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.
(N-2) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{a}\|$.
(N-3) 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対して $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (三角不等式)

最初の 2 つの証明は容易だが，(N-3) は次の **Schwartz の不等式** Schwartz' inequality を用いる：

補題 5.6 (Schwartz の不等式)**.** ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとき，

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．ただし $\|\cdot\|$ は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関するノルムである．

証明： $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ の場合は結論の式の両辺ともが 0 となるので，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ の場合のみ証明すればよい．これは $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$ とおいて $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ という式を良くみれば得られる．

■直交性と角度　ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとする．

定義 5.7. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ が**直交する** orthogonal であるとは，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ が成り立つことである．

とくに，零ベクトル $\boldsymbol{o}$ は任意のベクトルに直交する．
次に，補題 5.6 から，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ $(\neq \boldsymbol{o})$ に対して $-1 \leqq \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} \leqq 1$ が成り立つことに注意すれば，

定義 5.8. 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \cos^{-1}\left(\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$

を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ **の成す角** the angle between $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ という[*2].

■複素ベクトル空間の内積　複素ベクトル空間では内積の定義が少し異なる：

定義 5.9 (テキスト 128 ページ)**.** 複素ベクトル空間 V の**内積**（あるいは**エルミート内積** a Hermitian inner product）とは，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対して複素数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を与える対応の規則で，次を満たすものである：

(CI-1) 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$.
(CI-2) 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.
(CI-3) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
(CI-4) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$, 等号が成り立つための必要十分条件は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

[*2] $\cos^{-1}$ は逆余弦関数（ひょっとしたら arccos と習ったかもしれない）で，その値は閉区間 $[0, \pi]$ 内にとる．

注意 5.10.
- 条件 (CI-1) の右辺の $\bar{\ }$ は複素共役 complex conjugation を表している．この条件のみが定義 5.1 との違いであるが，これにより，$(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が成り立つことに注意しておく．
- 条件 (CI-4) の不等式は，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ が実数であってさらに負でないことを表している．したがって $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ と定めるとこれは負でない実数で，命題 5.5 がそのまま成り立つこともわかる．証明には Schwartz の不等式 (補題 5.6) を用いる．
- 条件 (CI-2) の代わりに $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ とする場合もある．むしろ物理学ではこちらの方が普通らしい．このときは $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が成り立つ．

例 5.11. 複素数をスカラとする n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の要素 $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, \ldots, a_n]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, \ldots, b_n]$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\bar{b}_n$$

と定めるとこれは $\mathbb{C}^n$ の内積を与える．この内積を $\mathbb{C}^n$ の標準内積という．

問題

5-1 テキスト 117 ページ，問 1, 問 2.

5-2 例 5.2 を確かめなさい．

5-3 例 5.3 を確かめ，さらに，$\mathbb{R}^2$ の内積はこの形のものに限ることを示しなさい（ヒント：与えられた内積 (,) に対して，$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を用いて $a = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)$, $b = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $c = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$ とおく.）

5-4 例 5.4 を確かめなさい．

5-5 補題 5.6 を示しなさい．ここで挙げた証明（の概略）はテキスト 119 ページのものと少しことなっている．この証明の図形的な意味を考えなさい[*3].

5-6 補題 5.6 を用いて命題 5.5 の (N-3) を示しなさい．（ヒント：$(||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||)^2 - ||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2$ を計算せよ．）

5-7 ベクトル空間 V の内積とそれに関するノルム $||\cdot||$ に対して，次が成り立つことを示しなさい．
- $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + ||\boldsymbol{b}||^2$ (余弦定理)
- $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = 2(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2)$ (中線定理)

さらに括弧内の名称との関係を考えなさい．

5-8 テキスト 119 ページ，問 4，テキスト 129 ページ 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.8, 5.9.

5-9 $V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された実数値連続関数全体が成すベクトル空間とし，

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

と定めると (,) は V の内積を与える．正の整数 m に対して $f_m(x) = \cos mx$, $g_m(x) = \sin mx$ で与えられる関数 f_m, g_m は V の要素と見なせる．さらに $f_0(x) = 1$ としておく．
- $m \neq n$ のとき，f_m と f_n，g_m と g_n はそれぞれ $(m \neq n)$ は直交することを確かめなさい．
- f_m と g_n は直交することを確かめなさい．
- f_m, g_m の大きさを求めなさい．

（ヒント：三角関数の合成公式を用いる）

[*3] この証明の利点は，複素ベクトル空間の内積に関する Schwarz の不等式の証明にも自動的になっていることである．テキスト 128 ページ， 下から 7 行目参照．