2012 年 11 月 8 日 (2012 年 11 月 15 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 6

前回の補足

- 問題 5-3 のご質問が複数ありました：示したいことは，$\mathbb{R}^2$ の任意の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は例 5.3 の形，すなわち

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y} \qquad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \det A > 0, \operatorname{tr} A > 0\right)$$

という形に表すことができる，ということです：与えられた $\mathbb{R}^2$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対してヒントに従って，$a = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)$, $b = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $c = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$ とおく．ただし $\boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[0, 1]$．すると，$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2]$, $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1, y_2]$ はそれぞれ $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$ と表せるから，内積の性質 (I-2), (I-3) を用いれば

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2, y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 \rangle = x_1y_1 \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle + x_1y_2 \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle + x_2y_1 \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle + x_2y_2 \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle .$$

さらに (I-1) を用いて，a, b, c の定義を思い出せば $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$ となり，結論の形を得る．ここで，$a = 0$ ならば $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0$ となり (I-4) に反するので $a \neq 0$．したがって $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}x_2^2$ となるが，任意の $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ に対してこの右辺が正になるための必要十分条件は $a > 0$, $ac - b^2 > 0$．これは $a + c > 0$, $ac - b^2 > 0$ と同値である（確かめよ）．

前回までの訂正

- Schwarz ⇒ Schwartz
- 講義資料 5, 4 ページ，下から 4 行目：例 01ex:polynomial ⇒ 例 1.12
- 講義資料 5, 5 ページ，補題 5.6 の証明：$\boldsymbol{x} := \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} := \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$
- 講義資料 5, 5 ページ，下から 2 行目 (CI-3)：
任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. ⇒ 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
- 講義資料 5, 6 ページ，2 行目：$(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \bar{\lambda}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ についてご指摘がありましたが，これはこのままで正しいのです．(CI-3) で $\lambda \in \mathbb{R}$ という誤植があったのですが，一般に λ は複素数とします．
- 講義資料 5, 6 ページ，1 行目：右辺の $\_$ は ⇒ 右辺の $\bar{\ }$ は
- 講義資料 5, 6 ページ，4 行目：$\sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} \Rightarrow \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$
- 講義資料 5, 6 ページ，問題 5-9: $V = \mathbb{C}^0([-\pi, \pi]) \Rightarrow V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$

授業に関する御意見

- 先生の話すスピードは日本人からみると早口ですか？　**山田のコメント：** たぶんそうです．ごめんなさい．
- 今期入って初めて授業を理解できた． / 今回はいつもよりは理解できた感があります．嬉しい．　**山田のコメント：** どうも
- 授業は面白いです．いろいろな話を聞かせて下さい．　**山田のコメント：** 努力します．
- 最近急に寒くなって布団からでれないです．　**山田のコメント：** 私もです．
- 今，眠いのですが，眠気をとるにはどうすれば一番いいと思いますか．　**山田のコメント：** 眠ればよいと思います．
- 中間と期末だけ出ればいいかなと思ってましたけど，出席点はあるのでしょうか．あと，板書がとても見やすかったです．
山田のコメント： 10 月 4 日の授業で説明した．OCW，講義 web ページに授業概要があります．
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\cos\theta$ 余弦定理より $2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\text{中略}) = 2(x_1y_1 + x_2y_2)$ で $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2$ では駄目なのですか？　**山田のコメント：** 文脈依存．この授業の文脈では駄目．なぜ駄目かは授業で説明した．
- 上上下下左右左右 BA　**山田のコメント：** そのとおり（ぇ）
- 内積の鼻くそを鼻くそというのはやめて下さい．　**山田のコメント：** 君が鼻くそっていってるじゃないか．
- いただきまーす　**山田のコメント：** ごちそうさま．

質問と回答

質問： 内積は講義資料 (I-1) ∼ (I-4) を満たせばよいということは内積の演算方法はいくつもあるという認識でいいんですか．もしそうだとすればなぜ内積を一意的な演算にしないのですか．

お答え： 「内積の演算方法はいくつもある」のではなく「内積は何通りもある」(例えば例 5.3，授業で扱った)．大抵は，一つの議論の中では内積をひと通りに決める．「ベクトル空間 V の内積 (,) ... で定義する．このとき ...」とあったら，それ以降はそこで定義された内積を使うわけで，この文脈では「内積の演算方法はたくさんある」わけではない．この講義では主に $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の標準内積を扱うが，無限次元空間（関数からなるベクトル空間など）を扱う場合は標準的な内積があるわけではなく，考える問題ごとに内積を変えるのが自然なので，抽象的に定義する．

質問： 授業の中で標準内積という言葉がでてきましたが，標準でない内積もありますか? エルミート内積がその 1 つですか.

お答え： 例 5.3．エルミート内積は，（講義で扱った）複素ベクトル空間の内積の総称で特定の内積を表す語ではない．

質問： $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2]$ としたとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + 2a_2b_2$ (1), $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$ (2) となり（原文ママ；とおくと，のことか）どちらも内積の条件が成立しますが， (1) = (2) とはならない上に，単に内積といった場合は (2) を示す（原文ママ；表すのことか）と教科書に表記されていました．ではなぜ (1) を含むように内積を定義したのでしょうか．なにか利益があるのでしょうか.

お答え： $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ には標準内積がありますが，一般のベクトル空間の内積は何を標準にしてよいかわかりませんし，扱う問題によって内積を取り替えるのが日常茶飯事だからです.

質問： 標準内積以外の内積の定義，たとえば例 5.3 の定義を利用して，ベクトルの大きさや 2 つのベクトルのなす角を求めることができますか? できない場合はこのように定義する必要がありますか?

お答え： (5.1) 式，定義 5.8 で大きさと角度が定義される．例えば例 5.3 の最初に挙げた $\mathbb{R}^2$ の内積 (,) に対して $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1, 1]$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[-1, 1]$ の大きさと内積は $||\boldsymbol{a}_1|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)} = 1$, $||\boldsymbol{a}_2|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)} = \sqrt{5}$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 1$ なので，この 2 つのベクトルの（この内積に関する）なす角は $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$.

質問： Schwarz' inequatlity の別の証明は次でよろしいですか?
$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$; $(a_1x - b_1)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \geqq 0 \Leftrightarrow (a_1^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) + (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geqq 0$．判別式 $\leqq 0$ より導かれる．($\mathbb{C}$ のときはこれが利用できないとおっしゃっていましたし，あまり使わない方法でしょうか?)

お答え： テキストでは本質的にこの方法を使っています．が，これでは $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関する不等式を示しただけですね．実ベクトル空間の任意の内積に関してこれが成り立つことを示したいのですが，これでは不足ですね.

質問： 複素ベクトルの $(a, b) := {}^ta\bar{b}$ となるのがよくわからなかったです．なぜここでは b ではなく $\bar{b}$ なのですか.

お答え： 内積の条件 (CI-1) を満たすようにしたいからです.

質問： 複素ベクトルの大きさはどのように定義するんですか． **お答え：** $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$．講義資料訂正あり.

質問： 内積の大きさ $||\boldsymbol{a}||$ （原文ママ：ベクトルの大きさのことか）の記号について，高校までは $|\boldsymbol{a}|$ という記号を用いていたんですが，$||\boldsymbol{a}||$ を $|\boldsymbol{a}|$ と書いてはいけないのですか?

お答え： 文脈依存．大きさを $|\boldsymbol{a}|$ という記号で表すこともある．そう表したら，その文脈では $|\boldsymbol{a}|$ と書かなければならない．この講義ではテキストに従って $||\boldsymbol{a}||$ と書くと決めたので $|\boldsymbol{a}|$ と書いてはいけない（ので一箇所訂正した).

質問： 普段内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で書きますか? 座標と勘違いしませんか?

お答え： (,) の中に入っているものが "ベクトル" なら内積でしょう．スカラなら座標と思えるでしょう.

質問： $\overline{(a, b)} = (b, a)$ となるように $\overline{}$ の記号が使われてますが，$(a, \lambda b) = \overline{(\lambda b, a)} = \bar{\lambda}\overline{(b, a)} = \bar{\lambda}\,(a, b)$ というときの $\bar{\lambda}$ はそれ以外の記号で表すことができる値なのでしょうか.

お答え： $\bar{\lambda}$ の意味はご存知ですね．複素数 λ の共役です（講義資料 5 の 6 ページに書いてあります)．もちろん $\bar{\lambda} = \mathrm{Re}\,\lambda - i\,\mathrm{Im}\,\lambda$ とも書けますが，普通は $\bar{\lambda}$ ですよね.

質問： たとえば $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき，$|\boldsymbol{b}| = 0$ (原文ママ；$||\boldsymbol{b}|| = 0$ のこと?) だとしたらこれも $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と言えるのですか?

お答え： そのように約束するのが普通，ということを前期に説明した.

質問： 内積について，高等学校で習うような図形的な意味をもつものと今回のような抽象的なものはどちらが先にうまれたと思っていますか． **お答え：** 実はあまり違わない時期だと思います.

質問： クリスマスの日に予定がなくて困っています． **お答え：** 私は予定が入っています.

質問： たぶん大丈夫です． **お答え：** そうですか．本当ですか?

6 正規直交系

ここでは，(実) ベクトル空間に内積 (,) が与えられているとする．

■単位ベクトル ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が $||\boldsymbol{v}|| = 1$ を満たしているとき，$\boldsymbol{v}$ を**単位ベクトル** a unit vector という．

例 6.1. $\mathbb{R}^n$ に標準内積が与えれているとき，$\mathbb{R}^n$ の標準基底のそれぞれのベクトルは単位ベクトルである．

一般に $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ のとき，$\boldsymbol{v}/||\boldsymbol{v}||$ は単位ベクトルである．これを $\boldsymbol{v}$ の**正規化** normalization という．

■正規直交系

定義 6.2. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が**正規直交系** an orthonormal sytem であるとは，

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立っていることである．(δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号 Kronecker's delta symbol.)

例 6.3. $\mathbb{R}^n$ に標準内積 (,) が与えられているとき，$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交系をなす．

例 6.4. $V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された実数値連続関数全体が成すベクトル空間とし，

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

と定めると (,) は V の内積を与える (問題 5-9 参照)．いま正の整数 m に対して

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad & v_1(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad & v_2(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \quad \dots, \quad & v_m(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \\ & & w_1(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad & w_2(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \dots, \quad & w_m(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \end{aligned}$$

とおくと，$\{v_0, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m\}$ は内積 (,) に関して正規直交系をなす．

定理 6.5 (テキスト 120 ページ)**.** 正規直交系は一次独立である．

> **証明：** ベクトル空間 V の内積 (,) に関する正規直交系 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ をとる．いま $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$ とおき，この両辺と $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, \dots, k)$ との内積をとると，定義 6.2 から $\alpha_j = 0$ となる．

系 6.6. n 次元ベクトル空間 V の内積 (,) に関する正規直交系 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ は V の基底である．

> **証明：** 定理 6.5 と問題 2-3 からすぐにわかる．

■直交化

定理 6.7 (Gram-Schmidt の直交化; テキスト 121 ページ)**.** ベクトル空間 V の一次独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ に対して，内積 (,) に関する正規直交系 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ で

$$\langle \boldsymbol{a}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, \quad \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \quad \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \quad \dots, \quad \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

を満たすものが存在する．ただし $\langle \dots \rangle$ は ... が生成する V の部分空間を表す．

2012 年 11 月 8 日 (2012 年 11 月 15 日訂正)

証明. [*1] 次のようにして，帰納的にベクトルの列 $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \dots, k)$ を定義する．

$$(*)\qquad \boldsymbol{b}_1 := \boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{b}_j := \boldsymbol{a}_j - \frac{(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_{j-1})}{(\boldsymbol{b}_{j-1}, \boldsymbol{b}_{j-1})}\boldsymbol{b}_{j-1} \qquad (j = 2, \dots, k).$$

この帰納的定義によって $\boldsymbol{b}_j$ が決まるためには $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{j-1}$ が零ベクトルであってはならない．実際，$\{\boldsymbol{a}_j\}$ は基底だから $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{o}$．したがって $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\,\boldsymbol{b}_1/\,(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)$ とおくことができて，さらに $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ は一次独立だから，$\boldsymbol{b}_2 \neq \boldsymbol{o}$ で，さらに $(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1) = 0$ であることはすぐにわかる（確かめよ）．以下，$\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4, \dots (\neq \boldsymbol{o})$ を $(*)$ によって定義すると $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\}$ は互いに直交する（確かめよ）．そこで $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{b}_j/||\boldsymbol{b}_j||$ $(j = 1, \dots, n)$ とすればそれが求めるものである． □

定義 6.8. ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が正規直交系であるとき, これを**正規直交基底** an orthonormal basis という．

命題 6.9. ベクトル空間 V の，内積 $(\ ,\ )$ に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が与えられているとき，任意の $\boldsymbol{x}$ は次のように表すことができる：$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$．　ただし，$x_j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ $(j = 1, \dots, n)$.

系 6.10. 内積が与えられた有限次元ベクトル空間には正規直交基底が存在する．

証明： 有限次元ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ に Gram-Schmidt の正規直交化を施せばよい．

例 6.11. 実数 θ と $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ に対して $\mathbb{R}^3$ のベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = {}^t[\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi], \quad \boldsymbol{a}_2 = {}^t[-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi], \quad \boldsymbol{a}_3 = {}^t[\sin\theta, -\cos\theta, 0]$$

のようにとると $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

例 6.12. たかだか 3 次の多項式で表される関数が成すベクトル空間 $\mathcal{P}^3$ (例 1.12) に 2 つの内積

$$(f, g) := \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \qquad \langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

を与える (例 5.4 参照)．このとき，$\mathcal{P}^3$ の基底 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ $(f_j(x) = x^j)$ に対して Gram-Schmidt の直交化を施し，$(\ ,\ )$, $\langle\ ,\ \rangle$ に関する正規直交基底を作ることができる．

■直交補空間

定義 6.13. ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとする．V の部分空間 W に対して，

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \text{ が全ての } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対して成り立つ}\}$$

を W の**直交補空間** the orthogonal complement of W という．

命題 6.14. ベクトル空間 V の部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ は

- V の部分空間である．
- 共通部分 $W \cap W^\perp$ は零ベクトルのみからなる：$W \cap W^\perp = \boldsymbol{o}$.

証明： 前半は演習．後半：$\boldsymbol{v} \in W \cap W^\perp$ とすると，$\boldsymbol{v} \in W$ かつ $\boldsymbol{v} \in W^\perp$ だから $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ なので $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$.

[*1] 定理 6.7 は実際に $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ を構成する方法，すなわち証明が重要．

以下，V を有限次元ベクトル空間，W をその部分空間とする．

命題 6.15.
- $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.
- 任意の $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ ($\boldsymbol{v}_1 \in W$, $\boldsymbol{v}_2 \in W^{\perp}$) の形にただひと通りに表すことができる．

証明： 前半：$\dim W = m$ とし，$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ を W の正規直交基底とする．すると任意の $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \alpha_m \boldsymbol{a}_m$ と $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の線形結合で表されるから，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $\alpha_1 (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_1) + \dots + \alpha_m (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_m) = 0$ となることである．したがって $\boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ であるための必要十分条件は $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_j) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$ が成り立つことである．このことに注意して，線形写像

$$F\colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \begin{bmatrix} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \text{を考えると} \qquad W^{\perp} = \operatorname{Ker} F.$$

いま，$F(\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1 \dots, m)$ が成り立つので $\operatorname{Im} F = \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m \rangle = \mathbb{R}^m$ なので，次元定理 4.6 から

$$\dim W^{\perp} = \dim \operatorname{Ker} F = \dim V - \dim \operatorname{Im} F = \dim V - m = \dim V - \dim W.$$

後半：$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{n-m}\}$ を $W^{\perp}$ の基底とする．ただし $n = \dim V$．すると，$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{n-m}\}$ は V の基底となる（確かめよ）．したがって，任意の $\boldsymbol{v}$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の線形結合（W の要素）と $\{\boldsymbol{b}_l\}$ の線形結合（$W^{\perp}$ の要素）の和で表される．さらに $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ ($\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_1 \in W$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}_2 \in W^{\perp}$) とふた通りに表されたとすると，$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{v}_2$．左辺は W の要素，右辺は $W^{\perp}$ の要素だから，命題 6.14 から $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$，すなわち $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2$ となり，この形の表し方がただひとつであることがわかった．

定義 6.16. 有限次元ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が定義されているとき，W を V の部分空間とすると，ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ ($\boldsymbol{v}_1 \in W$, $\boldsymbol{v}_2 \in W^{\perp}$) とひと通りに表される．この $\boldsymbol{v}_1$ を $\boldsymbol{v}$ の W への**正射影**または**直交射影** the orthotongal projection という．

例 6.17. 例 4.3 の状況を考える：

$$f\colon \mathbb{R}^5 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \qquad \left(A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

とし，$W := \operatorname{Ker} f$ とおくと，$W = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる．ただし $\boldsymbol{x}_1 = {}^t[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0]$, $\boldsymbol{x}_2 = {}^t[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -1, 1]$. これらは一次独立だから，とくに $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ は W の基底となる．

以下，$\mathbb{R}^5$ には標準内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとする．このとき $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ に Gram-Schmidt の直交化を施すと，W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が得られる．ただし $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} {}^t[-1, 1, 2, 0, 0]$, $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} {}^t[-1, -1, 0, -2, 2]$.

一方，

$$W^{\perp} = \operatorname{Ker} g, \qquad g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

なので，$W^{\perp}$ の基底， とくに正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を求めることができる（演習問題．検算は簡単．$\dim W^{\perp} = 3$ だから，基底は 3 本のベクトルからなる．これが $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ に直交する正規直交系をなしていることを確かめればよい．）

ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t[1, 1, 1, 1, 1]$ の W への正射影を求めよう．$\boldsymbol{v}$ を W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ と $W^{\perp}$ の $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ の線形結合で表した時の $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合の部分が正射影だから，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2)\, \boldsymbol{v}_2 = \frac{2}{15} {}^t[-1, 4, 5, 3, -3]$$

となる．

問題

6-1 テキスト 129 ページ 5.4; 130 ページ 5.7, 5.11, 5.12, 5.13; 131 ページ 5.16.

6-2 例 6.3 に出てくる言葉の定義がきちんと言えるか.

6-3 定理 6.7 の証明で与えた $\{\boldsymbol{v}_j\}$ が本当に定理の結論を満たしていることを確かめなさい.

6-4 補題 6.9 を示しなさい.

6-5 例 6.12 の $\mathcal{P}^3$ の $(\ ,\ )$ に関する正規直交基底と $\langle\ ,\ \rangle$ に関する正規直交基底をそれぞれ求めなさい．また，$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ をそれらの基底の線形結合で表しなさい.

6-6 命題 6.14 の前半を示しなさい.

6-7 例 6.17 を確かめなさい．また，同様の問題を自分で作ってみなさい.

6-8 有限次元ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとき，単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ が生成する部分空間 $W = \langle \boldsymbol{e} \rangle$ を考える．ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ をひとつとって固定し，$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{e}$ の大きさが最小になる t の値を求めなさい．さらに，そのときの $t\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{v}$ の W への正射影，$\boldsymbol{x}(t)$ は $\boldsymbol{v}$ の $W^{\perp}$ への正射影となることを確かめなさい.

6-9 問題 6-8 を，W の次元を上げて考えなさい．すなわち W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ をとり，

$$\boldsymbol{x}(t_1, \ldots, t_k) = \boldsymbol{v} - t_1\boldsymbol{e}_1 - \cdots - t_k\boldsymbol{e}_k$$

の大きさが最小になる $(t_1, \ldots, t_k)$ を求め，問題 6-8 と同じような結論が成り立つかどうかを考えなさい．（多変数関数の極値問題は扱ったことがありますか?）