2012 年 11 月 15 日 (2012 年 11 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 7

前回までの訂正

- 講義資料 6, 2 ページ下から 2 行目：高等学校でなる ⇒ 高等学校で習う
- 講義資料 6, 4 ページ 2 行目 (同じ式の板書で第 3 項の $\boldsymbol{b}_2$ が抜けていたそうです)：

$$\boldsymbol{b}_j := \boldsymbol{a}_j - \frac{(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{b}_{j-1})}{(\boldsymbol{b}_{j-1},\boldsymbol{b}_{j-1})}\boldsymbol{b}_{j-1}$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{b}_j := \boldsymbol{a}_j - \frac{(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{b}_{j-1})}{(\boldsymbol{b}_{j-1},\boldsymbol{b}_{j-1})}\boldsymbol{b}_{j-1}$$

- 講義資料 6, 4 ページ命題 6.9：$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{x}_n \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$
- 講義資料 6, 5 ページ例 6.17：

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x})\\(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x})\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \quad\Rightarrow\quad g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x})\\(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x})\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

授業に関する御意見

- 内積の定義は (I-1) ∼ (I-4)．はじめて知りました．普通は $\vec{a}\cdot\vec{b} = {}^t\vec{a}\vec{b}$ が内積だとかんがえていた．
  山田のコメント： 文脈による．この授業の後半ではおもに $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の標準内積を扱います．
- だんだん難しくなってきました． **山田のコメント：** そうです．
- 一週間が早く過ぎ去りますね． **山田のコメント：** まったくです．
- どんな音楽を聴くのですか? **山田のコメント：** いろいろ．イタリアオペラは好きですね．Wagner もいいけど．
- あはははは...。 **山田のコメント：** うふふふふ...♡

質問と回答

質問： 今までベクトルや関数に内積を定義していましたが，行列や数列にも内積は定義できるのですか．

お答え： たとえば，実数を成分とする $m\times n$ 型の行列全体がなすベクトル空間 $\mathrm{M}(m,n)$ (例 1.4) の要素 $X, Y \in \mathrm{M}(m,n)$ に対して $(X,Y) = \operatorname{tr}{}^tXY$ とすると，これは $\mathrm{M}(m,n)$ の内積を定めます．数列の空間でよく現れるのは

$$l^2 := \left\{ \boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \text{ は実数の数列で } \sum_{j=0}^{\infty}|x_j|^2 \text{ は収束する} \right\}.$$

これは数列全体の空間 $\mathcal{S}$ (例 1.5) の部分空間になり，$\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\boldsymbol{y} = \{y_j\}_{j=0}^{\infty} \in l^2$ に対して級数 $\sum_{j=0}^{\infty} x_jy_j$ は収束するのでこの和を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と書けば，(,) は l^2 の内積を与えています．(l^2 が部分空間になること，(,) の定義にもちいた和が収束することは，実数の連続性から示される．ここでは深入りしない．)

質問： $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ のとき $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_1b_1 + 2a_2b_2 = 0$ (1), $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 = \frac{1}{2}$ (2) このとき (1) より $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ だから "$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する" と言っていいんですか．そのとき (2) より $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \neq 0$ となりますが，これはどうするのでしょうか．

お答え： まず (1) と (2) は違う内積ですね．(確認：一つのベクトル空間の内積は沢山ある) ですから，これらに同じ文脈で同じ記号を充てるのは正しくありません．たとえば例 5.3 では 2 つの内積を扱っていますが，それらに異なる記号 (,), ⟨ , ⟩ を充てています．ここでは (1) の内積を ⟨ , ⟩, (2) の内積 (標準内積) を (,) と書くことにす

ると $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ を満たすので “内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して直交する” のですが，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$ なので “内積 $(\ ,\ )$ に関して直交しない” のです．定義 5.7 で直交性の定義をしていますが，その前に “ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとする” という文があり，直交性の概念は与えられた内積に依存することがわかります．したがって（考えている内積が文脈から明らかでなければ）“内積 ... に関して直交する” とはっきり言う必要があります．

質問： $\vec{0}$ ベクトルはすべてのベクトルに直交する．内積の定義より $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}) = (0\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$ になるので $\vec{0}$ ベクトルは他のベクトルと直交するといえますか．しかし，直交の定義より $(a_i, a_i) = 1$ にならなければならない．

お答え： 「直交する」というのは「内積が 0 になる」ということです（それが定義）．したがって零ベクトルは全てのベクトルに直交します．$(a_i, a_i) = 1$ の意味がわかりませんが，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1$ は直交の定義とは関係ありません．

質問： $\hat{r} = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$, $\hat{\theta}_r = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0) \Rightarrow \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$, $\hat{\phi} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi)$ となる．$\hat{\phi}$ は ϕ 方向の $\hat{r}$ の変化率，$\hat{\theta}_r$ は θ 方向の $\hat{r}$ の変化率を表していると考えてよいですか．　**お答え：**それが “微分” の定義ですね．

質問： $V \in \mathbb{R}^3$ (原文ママ) の正規直交基底は $a_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$, a_1, a_2, a_3 を順不同と考え，θ, φ のパラメーターのとり方を変えていっても全ての正規直交基底のとり方を網羅したことにはならないで合ってますか．また 2 つのパラメータでは R^3 の V における正規直交基底すべてのパターンを表すことはできませんか．

お答え： 「$V \in \mathbb{R}^3$ の正規直交基底」はおかしくありませんか? 出だしは「$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の（標準内積に関する）正規直交基底になる」ということだと思います（テキストや講義資料に従い，ベクトルを太字で書いた）．“合ってますか” はあってます．$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底全体を表すには 3 パラメータ必要です．次回講義でコメントします．

質問： 講義にて例 6.17 の解説時に次元定理から $\dim W^\perp = 5 - 2 = 3$ であるとあります．$5 = \dim V$, $2 = \dim W = \dim \operatorname{Ker} f$ だから $\dim W^\perp = \dim \operatorname{Im} f$ だと思うのですが，$\dim W^\perp = \dim \operatorname{Im} f$ となる理由を教えて下さい．

お答え： ここで用いた次元定理は，講義資料 6，5 ページ下から 8 行目の線形写像 $g\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ に関するもの．$\dim W^\perp = \dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \operatorname{Im} g = 5 - 2 = 3$.

質問： 例 6.17 で，$W^\perp = \operatorname{Ker} g$, $g(x) = \ldots$ となるところはわかりません．$g\colon \mathbb{R}^5 \to W$ ですか?

お答え： $g\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ です．W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ をとると，$\boldsymbol{v} \in W$ は $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{x}_1 + v_2\boldsymbol{x}_2$ $(v_1, v_2 \in \mathbb{R})$ と表すことができるから，$\boldsymbol{x} \in W^\perp \Leftrightarrow$ 「任意の $\boldsymbol{v}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0$」$\Leftrightarrow$ 「任意の v_1, $v_2 \in \mathbb{R}$ に対して $(\boldsymbol{x}, v_1\boldsymbol{x}_1 + v_2\boldsymbol{x}_2) = 0$」$\Leftrightarrow$ 「任意の v_1, $v_2 \in \mathbb{R}$ に対して $v_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1) + v_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_3) = 0$」$\Leftrightarrow$ 「$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1) = 0$ かつ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) = 0$」$\Leftrightarrow g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} g$.

質問： 講義資料 p. 6 の 6-7 の同様な問題をつくるとはどういうものをつくればよいのですか．あまりこのような問を経験していないので教えて下さい．

お答え： 例 6.17 の行列 A をいろいろ取り替えてみなさい．いろいろな型，階数の行列をつくればよい．

質問： δ_{ij} の数学的意味を教えて下さい．　**お答え：**定義はいいですね（前期にやった）．単位行列の (i, j) 成分です．

質問： $\big(\mathcal{P}^2, (\ ,\ )\big)$ と書いていましたが，右は内積でスカラーになりますよね．スカラーは内積をとれるのですか．

お答え： この外側の括弧は内積を表しているのではなく，2 つの対象のペアを表しています．右について気にされていますが，左も集合なので内積をとる対象には全くなっていません．$(*, *)$ の中身 $*$ がベクトル（ベクトル空間の要素）とみなせない場合は，内積を表しているのではない，と読んで下さい（ということを授業では説明しましたね）．

質問： $V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ の $\mathcal{C}^0$ の意味は何ですか?

お答え： 定義は大丈夫ですね? その概念になぜ “$\mathcal{C}$” を用いるかというと質問として回答します：“C” は連続 continuous の頭文字．微積分で C^r-級，すなわち r-回微分（偏微分）可能で r-次導関数（偏導関数）が連続，という概念を学んだと思います．とくに関数が C^0-級とは連続であることです．この C^0 に対応する文字を用いています．

質問： 直交補空間のイメージですが，もともとの空間にある全てのベクトルに対して，直交補空間は全てのベクトルがもともとのベクトルに対して直角であると考えていいのでしょうか．また，その場合，直交というのはもともとのベクトルと直交補空間のベクトルを 1 対 1 で対応させて考えなくてはならないのでしょうか?

お答え： イメージはともかく「定義」をおさえてください．さらに可能なところは数式で書きましょう．“もともとの空間” というのは定義 6.13 の W のことでしょうが，“もともとのベクトル” の意味が明確ではないのでお答えしようがないんです．さらに，この講義では「ベクトルが直角である」という言い方はしていないとはず．数式と論理は 21 世紀の我々現代人にとって重要な武器です．前近代人みたいに日常語とイメージだけで押し切らないように．

7 直交行列・ユニタリ行列

■転値行列と随伴行列 行列 $A=[a_{ij}]$ に対して，(i,j) 成分が a_{ji} となるような行列を A の bf 転置行列 the transposition of A といって ${}^tA$ と書く[*1]．また，複素数を成分とする行列 A の各成分の共役をとったものの転置行列を A の**随伴行列** the adjoint matrix of A といって，A^* と書く：$A^*={}^t\overline{A}$.

前期に学んだように，行列の積の転置，随伴行列は次の性質がある：

$$
{}^t(AB)={}^tB\,{}^tA, \qquad (AB)^*=B^*A^*.
$$

■転置行列と内積 ここでは $\mathbb{R}^n$，$\mathbb{C}^n$ には標準的な内積 (,) が与えられているとする (例 5.2, 5.11)：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \qquad \text{に対して} \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y},\\
&\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n \qquad \text{に対して} \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}.
\end{aligned}
$$

とくに，A を実数（resp. 複素数）を成分とする n 次正方行列とするとき，任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ (resp. $\in\mathbb{C}^n$) に対して

$$
(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\bigl(\boldsymbol{x},{}^tA\boldsymbol{y}\bigr) \qquad \bigl(\text{resp. } (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A^*\boldsymbol{y})\bigr)
$$

を満たす[*2].

定義 7.1. 正方行列 X が ${}^tX=X$ (resp. $X^*=X$) を満たすとき，X を**対称行列** a symmetric matrix (resp. **エルミート行列** a Hermitian matrix, または自己随伴行列 a self adjoint matrix) という．

補題 7.2. 実数 (resp. 複素数) を成分とする n 次正方行列 S が対称行列 (resp. エルミート行列) であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) に対して $(S\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},S\boldsymbol{y})$ を満たすことである．ただし (,) は $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) の標準内積である．

■直交行列

定義 7.3. 実数を成分とする n 次正方行列 A が ${}^tAA=I$ を満たすとき，A を**直交行列** an orthogonal matrix という．また，複素数を成分とする n 次正方行列 A が $A^*A=I$ を満たすとき，A を**ユニタリ行列** a unitary matrix という．

命題 7.4 (直交行列の性質)**.** (1) 直交行列の積は直交行列である．

(2) 直交行列 A の逆行列は ${}^tA$ であり，これもまた直交行列である．

(3) 直交行列の行列式は 1 または -1 である．

(4) 行列 $A=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]$ ($\boldsymbol{a}_j\in\mathbb{R}^n$) が直交行列であるための必要十分条件は $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関する正規直交基底となることである．

(5) 行列 A が n 次直交行列であるとき，任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つ．ただし (,) は $\mathbb{R}^n$ の標準内積である．

2012 年 11 月 15 日 (2012 年 11 月 22 日訂正)

[*1] A^T，A^{T} などと書くことも多い．

[*2] ここで resp. は respectively の略．この文は 2 つの文をまとめたもので，1 つは括弧内を取り除いた文，もうひとつは，“実数”，“$\mathbb{R}^n$”，式の前半をそれぞれ (respectively) “複素数”，“$\mathbb{C}^n$”，式の後半に置き換えた文である．

例 7.5. 1 次の直交行列は $[1]$, $[-1]$ である．

例 7.6. 2 次の直交行列は，次のいずれかの形に書ける：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}.$$

ただし θ は実数.

■正規直交基底と直交行列　再び一般のベクトル空間を考える．実数をスカラとする n 次元ベクトル空間 V に内積 $(\ ,\ )$ が与えられているとき，この内積に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ をひとつ固定しておく．

すると，V の任意の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ に対して

$$[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]A$$

を満たす n 次正則行列 A が存在する（講義資料 3, (3.2) 参照)．このとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が正規直交基底であるための必要十分条件は，A が直交行列となることである．

実際，$A = [a_{ij}]$ とおくと，$\boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_j$．したがって

$$(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{v}_i\right), \left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\boldsymbol{v}_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ki}a_{lj}\,(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ki}a_{lj}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}a_{li}.$$

ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号．この右辺は ${}^tAA$ の (k,l) 成分．ここで $\{\boldsymbol{v}_j\}$ が正規直交基底であることは $(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) = \delta_{kl}$ と同値．これは ${}^tAA = I$ と同値である．

問題

7-1 補題 7.2 を示しなさい．

7-2 命題 7.4 を示しなさい．さらに (3) の逆が成り立たないことを確かめなさい．

7-3 $\mathbb{C}^n$ の標準内積，ユニタリ行列に対して命題 7.4 に対応する命題を述べ，証明しなさい．とくにユニタリ行列の行列式の値はどうなるか．

7-4 例 7.6 を確かめなさい．

7-5 3 次の直交行列で，成分が 9 つすべて 0 でないものをひとつあげなさい．

7-6 ここでは $(\ ,\ )$ を $\mathbb{R}^2$ の標準内積とする．X を 2 次の対称行列，

$$\boldsymbol{v}(t) := \begin{bmatrix}\cos t \\ \sin t\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}(t) := \begin{bmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{bmatrix}, \qquad F(t) := (X\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(t))$$

とおく．F は周期 2π をもつ周期関数だから，区間 $[0, 2\pi)$ で最大値，最小値をとる．このとき，次を確かめなさい：

- $F'(t) = 2\,(X\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t))$ である．ただし $' = d/dt$.
- F が最小値をとるような t の値を t_1 とすると，$X\boldsymbol{v}(t_1)$ は $\boldsymbol{v}(t_1)$ と 1 次従属．したがって $X\boldsymbol{v}(t_1) = \lambda\boldsymbol{v}(t_1)$ となる実数 λ が存在する．
- 上の t_1 に対して $X\boldsymbol{w}(t_1) = \mu\boldsymbol{w}(t_1)$ となる実数 μ が存在する．
- $P = [\boldsymbol{v}(t_1), \boldsymbol{w}(t_1)]$ は行列式が 1 の直交行列である．
- ${}^tPXP$ は対角行列で，その対角成分は λ, μ である．