2012 年 11 月 22 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 8

お知らせ

- OCW/OCW-i にて「11 月 29 日に中間試験」と誤って表示されておりました．11 月 29 日には中間試験をいたしません（11 月 15 日に訂正しました）．中間試験は 10 月に予告したとおり **2013 年 1 月 10 日**です．一部の方にご心配をおかけし，申しわけありません．
- 今回は都合により提出物は受け付けません．今回の講義に関する質問も来週 11 月 29 日分の提出用紙をご利用ください．

前回までの訂正

- 講義資料 7, 3 ページ 3 行目：$A = {}^t\overline{A} \Rightarrow A^* = {}^t\overline{A}$
- 講義資料 7, 3 ページ：定義 7.3 に次を追加:
  また，複素数を成分とする n 次正方行列 A が $A^*A = I$ を満たすとき，A を**ユニタリ行列** a unitary matrix という．
- 講義資料 7, 4 ページ 6 行目：$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, {}_n\} \Rightarrow \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$
- 講義資料 7, 4 ページ，問題 7-5：9 つの成分が全て 0 でないもの ⇒ 成分が 9 つすべて 0 でないもの（こういう意味です）
- 講義資料 7, 4 ページ，問題 7-6 の 3, 4 番目の項目：$\boldsymbol{x}(t_1) \Rightarrow \boldsymbol{u}(t_1)$; $\boldsymbol{y}(t_1) \Rightarrow \boldsymbol{v}(t_1)$.

授業に関する御意見

- OCW-i には 11 月 29 日に中間試験とありましたが，本当にやるんですか?
  山田のコメント： 申しわけありません．手違いです．10 月に予告したように 1 月です．
- 来週は中間試験が多くて困っています．　**山田のコメント：** なのでこの科目は年明けにやりますね．
- 授業のプリント数が少しずつすくなくなってきています!
  山田のコメント： そうなんですよ．提出物も減っているし．
- エルミート行列とかなつかしかった．　**山田のコメント：** そんな昔?
- 自炊が面倒になってきました．　**山田のコメント：** そこを乗り越えれば
- 周回積分の記号とト音記号が似ていることに気づいた．　**山田のコメント：** ほんとだ (?)
- ビッグコア Mk-III が強いです．　**山田のコメント：** そうなんですか．
- 先週休んでしまい困った．　**山田のコメント：** それは困ったね．
- 特にありません．　**山田のコメント：** me, too

質問と回答

質問： 授業にて，X は対称行列で，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ としたときに，$2\,(X\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}(t)) = 0$ から $X\boldsymbol{a}(t) /\!/ \boldsymbol{a}'(t)$ が導ける理由を教えて下さい．

お答え： $\boldsymbol{a}'(t)$ は $\boldsymbol{a}(t)$ に直交する単位ベクトルになっています．とくに $\boldsymbol{a}'(t) \in \langle \boldsymbol{a}(t) \rangle^\perp$ （$\boldsymbol{a}'(t)$ は，$\boldsymbol{a}(t)$ が生成する $\mathbb{R}^2$ の部分空間の直交補空間の要素である）．ここで講義資料 6 の命題 6.15 から $\dim\langle \boldsymbol{a}(t) \rangle^\perp = 2 - 1 = 1$ なので $\boldsymbol{a}'(t)$ は $\langle \boldsymbol{a}(t) \rangle^\perp$ の基底である．一方，$(X\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}(t)) = 0$ だから $X\boldsymbol{a}(t) \in \langle \boldsymbol{a}(t) \rangle^\perp$．したがって，$X\boldsymbol{a}(t)$ は

$\boldsymbol{a}'(t)$ の線形結合，すなわちスカラ倍で表される．

質問： 「$\boldsymbol{a}' \perp \boldsymbol{a} \Rightarrow X\boldsymbol{a}(t_1) /\!/ \boldsymbol{a}(t_1)$」というのはなぜですか?

お答え： 文脈を明確にすべきですが，推測するところ上の質問と同じですね．とくに考えている空間が 2 次元であることは重要です．

質問： 対角化の例として授業や演習問題のように $F(t) = (X\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t))$ ($\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$) ($X$: 対称行列) が最小値をとるとき $F'(t) = 0$ のとき最小値をとると導いていますが，$F(t)$ が最小値をとるときは $F'(t) = 0$ が成立するのではないですか．なぜ $F'(t) = 0$ のとき $F(t)$ は最小値をとるのですか?

お答え： 講義ではだらだらと話してしまったのですが，話の筋を整理します：(1) $F(t)$ は周期関数だから，最大値および最小値をとる．(2) $t = t_1$ で $F(t)$ は最小値をとるとせよ．すると $F'(t_1) = 0$ である．というロジックです．

質問： 3 次直交行列は一般に $\sin\theta$ と $\cos\theta$ と $\sin\varphi$ と $\cos\varphi$ で表現できますか? どのように導くのか教えて下さい．

お答え： 講義で述べたように，3 次直交行列の一般形を表すには 3 パラメータ必要なので，θ, φ だけでは表せません．

質問： 問題 7-5 が分かりません．3 次の行列なので，成分計算ですすめると解けそうな気がしますが，もっと楽に解く方法があるのでしょうか．出来れば考え方と軽く方針を教えていただきたいです．

お答え： 講義でヒントを出した．正規直交基底をつくる．

質問： 7-3: ユニタリ行列は $I = A^*A$ より $|I| = |A^*|\,|A| = \overline{|A|}|A|$ より $\overline{|A|} = \frac{1}{|A|}$ で，$|A| = re^{ix}$ ($r \in \mathbb{R}$) とおくと $re^{-ix} = \frac{e^{-ix}}{r}$ より $r = \pm 1$ で $|A| = \pm e^{ix} = \pm(\cos x + i \sin x)$ ですかね?

お答え： 間違ってはイませんが，ちょっと補足：$-e^{ix} = e^{i(x+\pi)}$ なので $\pm$ は不要ですね．複素数に少しなれてくると次のように簡単に書けます：$\overline{|A|}|A| = 1$ だから $|A|$ は絶対値 1 の複素数．すなわち $|A| = e^{ix}$ ($x \in \mathbb{R}$) と書ける．

質問： 2 次の正方行列全体 $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ と数ベクトル全体 $\mathbb{K}^4$ はともに線形空間になるので，少なくとも線形代数においては $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ は見た目が違うだけで同一のものとみなせるということで OK ですか?

お答え： 「線形代数においては」は言い過ぎ．$\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ と $\mathbb{K}^4$ はベクトル空間とみなすときは同じ．だが，$\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ の要素を $\mathbb{K}^2$ にかけることはできるが $\mathbb{K}^4$ の要素を $\mathbb{K}^2$ にかけることはできない．すなわち「何をみるか」によって同一のものとみなせるかどうかは違ってくる．

質問： 正規直交基底とは何ですか? 他の基底とはどう違いますか． **お答え：**講義資料 6, 定義 6.8

質問： $(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) = \sum_{i=1}^n a_{ki}a_{li}$ から "A は直交行列である" のが $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が正規直交基底であるための必要条件であるのがわかる．十分条件であることの証明はどうやってしたらいいですか．

お答え： ご質問にある式だけで ok です．$A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$ ($\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^n$) とし $\boldsymbol{a}_j = {}^t[a_{1j}, \dots, a_{nj}]$ とおけば $A = [a_{ij}]$ と表されますが（ここまでがご質問の前提）${}^tAA = [b_{kl}]$ とすれば $b_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{il}a_{ik} = (\boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{a}_k)$ なので

$${}^tAA = I \qquad \Leftrightarrow \qquad b_{kl} = \delta_{kl} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{a}_k) = \delta_{kl}.$$

ただし δ_{kl} は Kronecker の delta 記号．

質問： 直交行列による線形変換の性質を教えて下さい． **お答え：**講義資料 7, 命題 7.4 (5)

質問： パラメータの自由度の定義がわかりませんでした．$\frac{1}{2}n(n-1)$ とパラメータの数の関係はどうなっているのですか．

お答え： 明確に定義はしていない，この講義の範囲ではいい加減な話です：一般に n 次の直交行列全体はいくつのパラメータを用いて表されるか? という問いをいい加減に考えよう．n 次正方行列は n^2 個の成分を持っているので n^2 個のパラメータで表されると思って良い．ここで，行列 A が直交行列である，という条件は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の等式で表される．実際 ${}^tAA = I$ は n^2 個の等式であるが，左辺も右辺も対称行列だから，独立な式は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 本である（これらが独立である，ということの定義も証明もここでは避けている）．したがって，${}^tAA = I$ を満たす A の集まりは $n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ 個のパラメータを用いて表せそうである．

質問： 複素数におけるエルミート行列を ${}^tA = A$ dなく $A^t = A$ と表していましたが，この添字の位置は実数，複素数を扱うかの違いで表記が異なるものでいいのですか．

お答え： A^t という記号は使っていません．A^* です．

8 固有値・固有ベクトル・対角化

■固有値 ここではしばらくの間，とくにことわりのない限り**スカラを複素数**としておく．

定義 8.1. 複素数を成分とする n 次正方行列 A に対して関係式

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o})$$

が成り立っているとき，スカラ λ を A の**固有値** an eigenvalue, $\boldsymbol{x}$ を A の固有値 λ に関する**固有ベクトル** an eigenvector with respect to the eigenvalue λ という．

命題 8.2. スカラ λ が正方行列 A の固有値であるための必要十分条件は $\det(A - \lambda I) = 0$ が成り立つことである．ただし I は単位行列.

証明： 関係式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ は $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ と書き換えられる．これを満たす零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $A - \lambda I$ が正則行列でないことである（補題 2.15 参照).

ここで n 次正方行列 A に対して，

$$f_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) \tag{8.1}$$

とおくと，これは λ の n 次の多項式で，とくに λ^n の係数は $(-1)^n$ である．これを A の**固有多項式**，**特性多項式** the characteristic polynomial という．固有値は f_A の根であるが，その重複度（注意 8.11 参照）を固有値の**重複度** multiplicity という．命題 8.2 と代数学の基本定理 8.10 より

系 8.3. 複素数を係数とする n 次正方行列は，複素数の固有値を重複度も含めてちょうど n 個持つ．

命題 8.4. 正方行列 A と正則行列 P に対して $f_{P^{-1}AP} = f_A$ が成り立つ．とくに $P^{-1}AP$ と A の固有値は重複度を含めて一致する．

■固有ベクトルの一次独立性

命題 8.5. 正方行列 A の互いに相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に関する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は一次独立.

証明： スカラ $s_1, \ldots, s_k$ に対して $s_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + s_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}$ が成り立っているとする．この等式の両辺に A を左からかけて，固有ベクトルの定義 $A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j\boldsymbol{x}_j$ を用いると $s_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + s_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}$ が得られる．この式に更に A をかけると $s_1{\lambda_1}^2\boldsymbol{x}_1 + \cdots + s_k{\lambda_k}^2\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}$，これをつづけて

$$s_1{\lambda_1}^l\boldsymbol{x}_1 + \cdots + s_k{\lambda_k}^l\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o} \qquad (l = 0, \ldots, k-1)$$

が得られる．これをまとめると

$$[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]SV = O \qquad \left(S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_k \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \right)$$

が得られる．とくに λ_j は互いに異なるスカラなので，命題 8.9 から V は正則行列．したがって，上の式の両辺に V^{-1} を右からかけると $[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]S = O$．すなわち $s_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}, \ldots s_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}$ が成り立つ．ここで，固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ は零ベクトルでないから $s_1 = s_2 = \cdots = s_k = 0$ を得る．

2012 年 11 月 22 日

■対角化　正方行列 $A = [a_{ij}]$ の (i,i)-成分を**対角成分** the diagonal components というのであった．とくに，対角成分以外のすべての成分が 0 であるような正方行列を**対角行列** a diagonal matrix という．対角成分が 1 行目から順に $t_1, \dots, t_n$ であるような n 次対角行列を

$$\operatorname{diag}[t_1, \dots, t_n] := \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{bmatrix}$$

と表すこともある．

正方行列 A を**対角化する** to diagonalize とは，正則行列 P を選んで

$$P^{-1}AP = \Lambda \qquad (\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]) \tag{8.2}$$

の形にすることである．

命題 8.6. 正方行列 A が (8.2) のように対角化されているならば，λ_j は A の固有値で，P の第 j 列は A の固有値 λ_j に対する固有ベクトルである．とくに $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ は A の固有値と重複度を含めて一致する．

証明： 式 (8.2) を $AP = P\Lambda$ と書き換え，$P = [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n]$ と分解して $\boldsymbol{p}_j \neq \boldsymbol{o}$（なぜか）に注意すればよい．後半は命題 8.4 から得られる．

注意 8.7. 任意の正方行列が対角化できるわけではない．実際

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は対角化できない．

定理 8.8. 正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて固有多項式の単根であるとする．このとき，A は対角化可能である．

証明： 各 λ_j に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ をとり，$P := [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n]$ とおくと，固有値が互いに相異なることと命題 8.5 から P は正則．さらに $A\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j$ なので $AP = P\Lambda$ $(\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n])$ である．

固有多項式が重根を持つ場合は次回以降に扱う．

■復習　今回用いたいくつかの事実を復習しておく．

命題 8.9 (Vandermonde の行列式)**.** スカラ $a_1, \dots, a_k$ $(k \geqq 2)$ に対して

$$V(a_1, \dots, a_k) := \begin{bmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^{k-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \dots & {a_2}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_k & {a_k}^2 & \dots & {a_k}^{k-1} \end{bmatrix} \qquad \text{とおくと} \qquad \det\bigl(V(a_1, \dots, a_k)\bigr) = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

が成り立つ．ここで右辺は $1 \leqq i < j \leqq k$ を満たす組 (i,j) 全てについて積をとることを表している．とくに $V(a_1, \dots, a_k)$ が正則行列であるための必要十分条件は $a_1, \dots, a_k$ が互いに異なることである．

証明： 行列のサイズ k に関する数学的帰納法による．

$$\det\bigl(V(a_1, a_2)\bigr) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

なので，$k=2$ のとき結論は正しい．
いま，$k \geqq 2$ が与えられ，任意のスカラ α_1, ..., α_{k-1}

$$\det\bigl(V(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})\bigr)=\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)$$

が成り立っているとする．このとき，スカラ a_1, ..., a_k に対して $V := V(a_1,\dots,a_k)$ とおき，その第 l 行 $(l=2,\dots,k)$ から第 1 行をそれぞれ引くと，

$$\begin{aligned}
\det V &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^{k-1} \\ 0 & a_2-a_1 & {a_2}^2-{a_1}^2 & \dots & {a_2}^{k-1}-{a_1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_k-a_1 & {a_k}^2-{a_1}^2 & \dots & {a_k}^{k-1}-{a_1}^{k-1} \end{vmatrix} \\
&= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_k-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^{k-1} \\ 0 & 1 & a_2+a_1 & \dots & {a_2}^{k-2}+{a_2}^{k-3}a_1+\dots+{a_1}^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_k+a_1 & \dots & {a_k}^{k-2}+{a_k}^{k-3}a_1+\dots+{a_1}^{k-2} \end{vmatrix} \\
&= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_k-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2+a_1 & \dots & {a_2}^{k-2}+{a_2}^{k-3}a_1+\dots+{a_1}^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_k+a_1 & \dots & {a_k}^{k-2}+{a_k}^{k-3}a_1+\dots+{a_1}^{k-2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

この最後の行列式をとっている行列を $V' := [\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_{k-1}]$ と列ベクトルに分解し，

$$\boldsymbol{b}'_1=\boldsymbol{b}_1,\quad \boldsymbol{b}'_2=\boldsymbol{b}_2-a_1\boldsymbol{b}'_1,\quad \boldsymbol{b}'_3=\boldsymbol{b}_3-a_1\boldsymbol{b}'_2-{a_1}^2\boldsymbol{b}'_1,\ \dots,\ \boldsymbol{b}'_{k-1}=\boldsymbol{b}_{k-1}-a_1\boldsymbol{b}'_{k-2}-{a_1}^2\boldsymbol{b}'_{k-3}-\dots-{a_1}^{k-2}\boldsymbol{b}'_1$$

とおけば，

$$\det V'=\det[\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_{k-1}]=\det\bigl(V(a_2,a_3,\dots,a_k)\bigr)$$

となるので，数学的帰納法の仮定から結論が得られる．

前期に以下の定理を紹介した．証明はこの講義の範囲を超えるのでここでは述べない．

定理 8.10 (代数学の基本定理)**.** 複素数 a_0, ..., a_n $(n\neq 0)$ を係数とする多項式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

は複素数の根をもつ．とくに $f(x)$ は

$$f(x)=a_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)\qquad(\lambda_j\in\mathbb{C}, j=1,\dots n) \tag{8.3}$$

の形に因数分解される．

注意 8.11. 式 (8.3) に現れる根 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ のうち，同じものをまとめて

$$f(x)=a_n(x-\lambda_{j_1})^{k_1}(x-\lambda_{j_2})^{k_2}\dots(x-\lambda_{j_m})^{k_m}\qquad(k_1+\dots+k_m=n)$$

とおく．ただし k_l は正の整数，$\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_m}$ は互いに異なる複素数である．このように表したとき，k_l を根 λ_{j_l} の**重複度** the multiplicity という．とくに，重複度 1 の根を**単根** a simple root, 重複度 2 以上の根を**重根** a multiple root という．

問題

8-1 命題 8.4 を示しなさい.

8-2 命題 8.6 を示しなさい.

8-3 例 8.7 を確かめなさい.（ヒント：固有値は 1（重根）だから対角化されるとしたら $P^{-1}AP = I$.）

8-4 テキスト 135 ページ，例 1；136 ページ，問 1, 例 2, 問 2；156 ページ， 6.1; 157 ページ，6.7, 6.8; 158 ページ, 6.18 (オプション).

8-5 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & -9 & 8 & -5 \\ -4 & -11 & 9 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

に対して

- A の固有多項式 f_A を求めなさい.
- A の固有値を求めなさい.
- A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを一つずつ求めなさい.（ヒント：固有値を λ とするとき，同次連立 1 次方程式 $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ をとき，$\boldsymbol{o}$ でない解をひとつ選べば良い.
- $\Lambda = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正方行列 P と，Λ をそれぞれひとつずつ求めなさい.

8-6 次の行列を対角化しなさい.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

ただし θ は実数である.