2012 年 11 月 29 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 9

お知らせ

- 前回はお休みをいただきましたが，今回は提出物を受け付けます．前回の質問・訂正なども今回の用紙でお願いします．

前回の補足

対角化の問題の正解の例（固有値・固有ベクトルの順番を変えたり，固有ベクトルを 0 でないスカラ倍しても正解）：

- 講義で扱った例題：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&3&1&1\\3&1&1&2\\1&1&2&3\end{bmatrix};\qquad P=\begin{bmatrix}1&1&2-\sqrt{5}&2+\sqrt{5}\\-1&1&-1&-1\\1&1&-2+\sqrt{5}&-2-\sqrt{5}\\-1&1&1&1\end{bmatrix}\quad\text{とすると}\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&\sqrt{5}&0\\0&0&0&-\sqrt{5}\end{bmatrix}.$$

- 問題 8-5:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2&-1\\-3&-9&8&-5\\-4&-11&9&-7\\-1&-1&0&-1\end{bmatrix};\qquad P=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&-1\\1&1&0&-1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\quad\text{とすると}\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

- 問題 8-6 1 番目：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix};\quad P=\begin{bmatrix}1&1&1-\sqrt{2}&1+\sqrt{2}\\-1&1&1&1\\1&1&-1+\sqrt{2}&-1-\sqrt{2}\\-1&1&-1&-1\end{bmatrix}\quad\text{とすると}\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&10&0&0\\0&0&2\sqrt{2}&0\\0&0&0&-2\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

- 問題 8-6 2 番目：

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&1&1\\2&0&1\end{bmatrix}\quad\text{とすると}\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- 問題 8-6 3 番目：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix};\qquad P=\begin{bmatrix}1&\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}&\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\1&\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}&\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\1&1&1\end{bmatrix}\quad\text{とすると}\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&i\sqrt{3}&0\\0&0&-i\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

- 問題 8-6 4 番目：

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix};\qquad P=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}&-\sin\frac{\theta}{2}\\\sin\frac{\theta}{2}&\cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\quad\text{とすると}\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

- 問題 8-6 5 番目：

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix};\qquad P=\begin{bmatrix}1&i\\-i&1\end{bmatrix}\quad\text{とすると}\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{bmatrix}$$

9　三角化

■ユニタリ行列　複素数を成分とする n 次正方行列 U が**ユニタリ行列** a unitary matrix であるとは，$U^*U = I$ が成り立つことである．ここで $U^* = {}^t\overline{U}$ は U の随伴行列（共役転置行列）である．ユニタリ行列 U は正則で，その逆行列 $U^{-1} = U^*$ もまたユニタリである．また，ユニタリ行列の積はユニタリである．

いま $\mathbb{C}^n$ の標準内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ を考えると，正方行列 $U = [\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n]$ ($\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{C}^n$) がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ が正規直交系となること ($(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k) = \delta_{jk}$) である．

■三角化　正方行列 $D = [d_{ij}]$ が**上三角行列** an upper triangular matrix であるとは，$i > j$ を満たす各添字 (i, j) に対して $d_{ij} = 0$ が成り立つこと，すなわち “対角成分の下側の成分がすべて 0” となることである．

命題 9.1. 上三角行列の固有値は，その対角成分と重複度を含めて一致する．

証明： 上三角行列 D の対角成分を順に $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする．このとき $D - \lambda I$ はまた上三角行列で，その対角成分は $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda$ であるから，D の固有多項式は $f_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ となる．

定理 9.2. 任意の正方行列 A はユニタリ行列によって上三角化することができる．すなわち，ユニタリ行列 U をうまくとって $U^{-1}AU = D$ (D は上三角行列) とすることができる．

証明： 行列のサイズ n に関する数学的帰納法を用いる．1 次正方行列はつねに上三角であるから，$n = 1$ の場合に結論は正しい．
いま，与えられた正の整数 $n \geqq 2$ に対して，任意の $n-1$ 次正方行列がユニタリ行列によって上三角化されてると仮定し，n 次正方行列 A がユニタリ行列で上三角化できることを示そう：行列 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$，$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{C}^n$ を λ_1 に関する固有ベクトルとする．とくに $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$ なので，正規化して $||\boldsymbol{x}_1|| = 1$ としておく．
いま，直交補空間 $W := \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle^\perp$ を考えるとこれは $\mathbb{C}^n$ の $n-1$ 次元部分空間である[*1]．そこで W の正規直交基底[*2]を $\{\boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ とすると，$\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となる (確かめよ)．したがって，$P := [\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n]$ とするとこれはユニタリ行列で，$P^{-1}AP = D$ とすると，$AP = PD$ なので D の第一列 $\boldsymbol{v}$ は $A\boldsymbol{x}_1 = P\boldsymbol{v}$ を満たす．ここで $\boldsymbol{x}_1$ は A の固有値 λ_1 に関する固有ベクトルだから $\boldsymbol{v} = {}^t[v_1, \dots, v_n]$ と書けば

$$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 = P\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + v_n\boldsymbol{x}_n.$$

したがって，$\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ の一次独立性から $v_1 = \lambda_1$, $v_2 = \dots = v_n = 0$．すなわち $P^{-1}AP$ は次のように書ける：

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad (B \text{ は } n-1 \text{ 次の正方行列}).$$

ここで，帰納法の仮定から，$Q'^{-1}BQ'$ が上三角行列となるような $n-1$ 次ユニタリ行列 Q' が存在する．そこで

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q' \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \text{とすると} \quad Q^{-1}P^{-1}APQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & Q'^{-1}BQ' \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \text{は上三角.}$$

ここで $U := PQ$ とおけばこれはユニタリ行列で結論を満たす．

2012 年 11 月 29 日

[*1] 命題 6.15．そこではスカラを $\mathbb{R}$ としているが $\mathbb{C}$ としても全く同様のことが成り立つ．

[*2] 正規直交系の存在は定理 6.7．ここでも証明は実ベクトル空間に対して与えているが，複素ベクトル空間でも全く同様．

以下，三角化可能性の（理論的）応用をいくつかあげる：

■正規行列の対角化可能性

定義 9.3. 正方行列 A が**正規行列** a normal matrix であるとは，$A^*A = AA^*$ が成り立つことである．

例 9.4.
- 対角行列は正規行列である．
- 行列 A が エルミート行列，すなわち $A^* = A$ を満たすならば正規行列である．とくに， 実数を成分とする対称行列は正規行列である．
- 行列 A が**歪エルミート行列** (わいえるみーと) a skew hermitian matrix であるとは $A^* = -A$ が成り立つことである．とくに実数を成分とする歪エルミート行列，すなわち ${}^tA = -A$ 満たす実行列を**交代行列** a skew symmetric matrix という．歪エルミート行列，（実）交代行列は正規行列である．
- ユニタリ行列は正規行列である．実際，ユニタリ行列 A 対して $A^* = A^{-1}$ だから $AA^* = A^*A = E$.

補題 9.5. 上三角行列が正規行列であるための必要十分条件は，それが対角行列となることである．

証明： 十分性は例 9.4 でみたので必要性を示す．n 次の上三角行列 $A = [a_{ij}]$ が正規行列であるとする．このとき AA^* と A^*A の (i, i) 成分を比較して，$i > j$ のとき $a_{ij} = 0$ であること（上三角）に注意すれば

$$(*) \qquad \sum_{l=1}^{n} a_{il}\bar{a}_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{li}\bar{a}_{li} \qquad \text{すなわち} \qquad \sum_{l=i+1}^{n} a_{il}\bar{a}_{il} = \sum_{l=1}^{i-1} a_{li}\bar{a}_{li}$$

が成り立つことがわかる．式 $(*)$ の $i = 1$ の場合から

$$\sum_{l=2}^{n} a_{1l}\bar{a}_{1l} = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$$

を得る．さらに $(*)$ の $n = 2$ の場合から

$$\sum_{l=3}^{n} a_{2l}\bar{a}_{2l} = \sum_{l=1}^{1} a_{l2}\bar{a}_{l2} = a_{12}\bar{a}_{12} = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0.$$

これを繰り返して $a_{ij} = 0$ $(i < j)$ が得られるので A は対角行列.

定理 9.6. 行列 A がユニタリ行列で対角化されるための必要十分条件は A が正規行列となることである．

証明： 必要性：ユニタリ行列 U で $U^{-1}AU = \Lambda$ (Λ は対角行列) となっているとする．U がユニタリだから $U^{-1} = U^*$ なので，$U^*AU = \Lambda$. この共役転置行列をとると $U^*A^*U = \Lambda^*$. ここで，対角行列 Λ が正規であることから A が正規行列であることがわかる（確かめよ).
十分性：定理 9.2 より，ユニタリ行列 U で $U^*AU = D$ (D は上三角) となるものがとれる．ここで A は正規なので $DD^* = U^*AA^*U = U^*A^*AU = D^*D$ となり D は正規．したがって， 補題 9.5 から D は対角行列.

とくに，対称行列・エルミート行列の対角化は応用上重要なので，次回扱う．

■固有空間とその次元 一般に n 次正方行列 A の固有値 λ に対して

$$W_\lambda := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \,;\, A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\} \tag{9.1}$$

は $\mathbb{C}^n$ の部分空間である．実際 W_λ は行列 $A - \lambda I$ であらわされる $\mathbb{C}^n$ の線形変換の核 kernel である（補題 4.1. この W_λ を A の固有値 λ に対する**固有空間** the eigenspace という．

行列 A の固有値 λ に関する固有ベクトルは W_λ の要素である．また W_λ の $\boldsymbol{o}$ でない要素は A の固有値 λ に関する固有ベクトルである．

補題 9.7. 行列 A と正則行列 P, Q に対して $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(PAQ)$ が成り立つ．

証明： 行基本変形は正則行列を左からかけることと同じなので，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(PA)$．また A を (m,n)-型とするとき，線形写像 $F\colon \mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ の像 $\operatorname{Im} F$ の次元が $\operatorname{rank} A$ である（例 4.4）が，AQ が定める線形写像の像は $\operatorname{Im} F$ と一致するから（確かめよ）$\operatorname{rank} AQ = \operatorname{rank} A$.

定理 9.8. 正方行列 A の，重複度 m をもつ固有値 λ に対する固有空間 W_λ の次元は 1 以上 m 以下である．

証明： 次元定理 4.6 (例 4.4) から，$\dim W_\lambda = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$ である．ただし A の次数を n とした．いま，A の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$，$\lambda_1$ の重複度を m として $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ とし，定理 9.2 のように $U^{-1}AU = D$（D は上三角行列で，その対角成分は順に λ_1, …, λ_n）としておく．ここで補題 9.7 から $\operatorname{rank}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{rank} U^{-1}(A - \lambda I)U = \operatorname{rank}(D - \lambda I)$ であるが $D - \lambda I$ は上三角行列で，$m+1$ 行目以下の対角成分は 0 ではない．したがって $\operatorname{rank}(D - \lambda I) \geqq n - m$ となり，結論が得られる．

■ケイリー・ハミルトンの定理

一般に x の多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

と正方行列 A に対して

$$f(A) := a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

と書く．

補題 9.9. 正方行列 A とスカラ λ, μ に対して $A - \lambda I$ と $A - \mu I$ は可換である：

$$(A - \lambda I)(A - \mu I) = (A - \mu I)(A - \lambda I).$$

定理 9.10 (Cayley-Hamilton)**.** 正方行列 A の固有多項式を f_A とすると $f_A(A) = O$.

証明： 一般に，多項式 f と正則行列 U に対して $f(U^{-1}AU) = U^{-1}f(A)U$ なので定理 9.2 から，A が上三角行列である場合を示せば良い（確かめよ）．
以下，上三角行列 D の対角成分を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ と表すと $f_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$ である（命題 9.1）．したがって

$$f_D(D) = (-1)^n(D - \lambda_1 I)\dots(D - \lambda_n I)$$

であるが，補題 9.9 から右辺の積の順番は自由に入れ替えて良い．ここで $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とすると，D が上三角であることに気をつければ

$$(D - \lambda_1 I)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{o}, \qquad k \geqq l \text{ のとき} \qquad (D - \lambda_k I)\boldsymbol{e}_l \in \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{k-1} \rangle$$

が成り立つことがわかる．これを用いると

$$(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I)\dots(D - \lambda_k I)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{o}$$

なので $f_D(D)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{o}$ が各 k に対して成り立つ．したがって $f_D(D) = O$.

例 9.11. 2 次正方行列 A に対して $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = O$.

■固有多項式の係数

補題 9.12. 次数 n の正方行列 A と正則行列 P に対して

$$\det(P^{-1}AP) = \det A, \qquad \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

が成り立つ．

定理 9.13. n 次正方行列 A の固有値を（重複しているものはその重複度だけ並べることにして）$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ と書くと，

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n, \qquad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

である．

証明： 補題 9.12 と定理 9.2 から，A が最初から上三角行列としてよい．上三角行列の行列式とトレースはそれぞれ対角成分の積と和であるが，命題 9.1 からそれらは全ての固有値の積と和である．

系 9.14. n 次正方行列 A の固有多項式を

$$f_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda^{n-1} - \cdots + a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda + a_0$$

と書くと，

$$a_{n-1} = \operatorname{tr} A, \qquad a_0 = \det A$$

が成り立つ．

問題

9-1
- ユニタリ行列 U の逆行列は U^{-1} で，これもまたユニタリであることを確かめなさい.
- ユニタリ行列の積はユニタリ行列であることを確かめなさい.
- ユニタリ行列の行列式の値は絶対値が 1 の複素数であることを示しなさい.
- 正方行列 $U = [\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n]$ ($\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{C}^n$) がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ が $\mathbb{C}^n$ の内積に関して正規直交系となること ($(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k) = \delta_{jk}$) であることを確かめなさい.
- 行列式が $e^{i\theta}$ (θ は実数) であるような 2 次のユニタリ行列は
$$e^{\frac{i\theta}{2}} \begin{bmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{bmatrix} \qquad (p\bar{p} + q\bar{q} = 1)$$
の形をしていることを確かめなさい.

9-2 n 次正方行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とするとき，A^k (k は正の整数) の固有値は $\{(\lambda_1)^k, \dots, (\lambda_n)^k\}$ であることを示しなさい.（ヒント：$D := U^{-1}AU$ を上三角行列としておくと，$D^k = U^{-1}A^kU$ は A^k と同じ固有多項式をもつ).

9-3 n 次正方行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とする．x の多項式 $p(x)$ に対して行列 $p(A)$ の固有値は $\{p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\}$ であることを示しなさい.

9-4 n 次正方行列 A が，ある番号 k に対して $A^k = O$ を満たすとする.
- A の固有値はすべて 0 であることを示しなさい.
- $A^n = O$ であることを示しなさい. (固有多項式が λ^n となることと Cayley-Hamilton の定理)

9-5 2 次正方行列 A が $\det A = 1$, $-2 < \operatorname{tr} A < 2$ を満たしているとする．このとき，$\operatorname{tr} A = 2\cos\theta$ を満たす θ をとれば，任意の正の整数 m に対して
$$A^m = \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} A - \frac{\sin(m-1)\theta}{\sin\theta} I$$
が成り立つことを示しなさい.

9-6 補題 9.12，定理 9.13 を示しなさい.