2012 年 12 月 6 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 10

お知らせ

- 10 月に予告しましたように，来年 1 月 10 日に中間試験を行います．その予告を次回 12 月 13 日にいたしますので，お誘い合わせの上おいでください．
- 次回 12 月 13 日もまた提出物の受付をやめさせて頂きます．今回は受け付けます．

前回までの訂正

- 講義資料 9, 2 ページ, 下から 2 行目：

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0\dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q := \begin{bmatrix} 1 & 0\dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q' \\ 0 & \end{bmatrix}$$

授業に関する御意見

- w.r. to の意味がやっとわかりました．with respect to ですね．
  山田のコメント： ごめんなさい．2 回くらいちゃんと書いたので推測できるかと思いました．
- 日本語で ok．ノートが英語だと教科書と対応させにくいです．「将来的には英語で読むのだから...」というのもわかりますが
  山田のコメント： ご意見ありがとうございます．英語で授業を行うという“国際化”（それが国際化なのか?）のプレッシャーがかかっています．そこで，試みに板書だけ 8・9 割くらいを英語にしています．ご意見を頂けると今後の議論の材料にできますので，またよろしく．ところで「教科書と対応させにくい」のであれば「英語のテキストを用いる」という選択肢もありますが，どうでしょうか．
- むずかしい．　**山田のコメント：** ちょっとね
- 来週も試験の目白押しで困ってます．　**山田のコメント：** なのでこの科目は 1 月に．
- 黒板のすぐ手前にある電灯を点けて欲しい．　**山田のコメント：** はい．

質問と回答

質問： 補題 9.5, $\sum_{l=1}^{n} a_{il}\bar{a}_{il}$ は AA^* の (i,i) 成分, $\sum_{l=1}^{n} a_{li}\bar{a}_{li}$ は A^*A の (i,i) 成分ですか? それは $\sum_{l=1}^{n} a_{il}\bar{a}_{li}$ と $\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{il}a_{li}$ になるのではないのでしょうか．

お答え： A^* は A の各成分の共役複素数をとって**転置**している（$A^* = {}^t\overline{A}$）ので，$\bar{a}_{ij}$ の添字の順番が逆になります．すなわち講義資料の式が正しいのです．

質問： A が $A^*A = AA^*$ を満たす行列で，U がユニタリ行列の時，$U^*AU = D$ とすると $D = D^*$ となる理由が分かりません．

お答え： 一般になりません．講義資料では正規行列（ご質問の性質を持つ行列）の対角化可能性を示していますが，このときは $DD^* = D^*D$ がでてくるだけ．講義ではより簡単な，$A = A^*$ (Hermite 行列の場合) を示した（と板書したはずだが）なので $D = D^*$ となっている．

質問： 2 次正方行列 A に対する式 $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = O$ は n 次正方行列の場合はどうなりますか?

お答え： 定理 9.10．この定理の特別な場合がご質問の式．

質問： Cayley-Hamilton の定理から，例 9.11 若しくは系 9.14 がなぜ成り立つのかわからないので教えてください．

お答え： 例 9.11 は講義で説明した（11 月 22 日の講義で 2 次行列の固有多項式の形を説明したのを覚えているだろうか）．系 9.14 は定理 9.13 から分かる：$f_A(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda)$ を展開して定数項，$(n-1)$ 次の項の係数を見よ．

質問： 線形空間など $\mathbb{K}$ 上で定義されるものが多いのですが，これは $\mathbb{C}$ 上で定義するのと何が違うのでしょうか．($\mathbb{C}\subset\mathbb{R}$ であるので，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ であるように感じます)

お答え： 考える問題によっては係数を実数に**限る**必要がある場合があります．また，有理数や別の "体" (前期に一言だけ述べましたよね) の要素を係数と考えることもあります．それらに共通する議論をする際に "体 $\mathbb{K}$ 上の" という言い方をしますが，ここでは $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ を想像してください．前回までは $\mathbb{C}$ 上の話が殆どでした．今回は $\mathbb{R}$ に限る議論があります．

質問： 「tr」ってもともと何と言いますか？ **お答え：** trace.

質問： $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}(PAQ)$ (P, Q は正則行列) の証明の $\operatorname{rank} AQ=\operatorname{rank} A$ の示し方が分かりません．

お答え： 示し方は講義資料 9 の 4 ページ，4, 5 行目に書いてあります．この議論は 2 つのパートに分けられますが，どちらがわからないのでしょう．

質問： 行列 A を $P^{-1}AP=\Lambda$ ($\lambda=\operatorname{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$) となるよう対角化できる P が存在しない $\Leftrightarrow$ 行列 A に重複する固有値が存在する，で合っていますか．

お答え： 合っていません．$\Rightarrow$ は正しい（定理 8.8）が，$\Leftarrow$ には簡単に反例が見つかる．たとえば 2 次以上の零行列や単位行列は反例．

質問： 11 月 29 日の授業の資料が金曜の朝になってもネットに上がっていませんでした．29 日はちょっと授業にでられなかったので，資料だけでもお願いします．もらいすぎた質問用紙が家に残っていて良かったです．

お答え： 土曜日にアップしました．ご迷惑をおかけしました．質問用紙も OCW や Web ページに上がっているのはご存知ですね．

質問： 問題 9-2 は A の固有値が $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ より $f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(\lambda-\lambda_n)=0$ の解が $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ であることと $D=U^{-1}AU$ を上三角として $f_{A^k}(A^k)=f_{D^k}(A^k)$ が成立することを使うような気がするのですが，それ以降が分からなくなるので教えてください．

お答え： ご質問のように A の固有値をとり，$U^{-1}AU=D$ が上三角行列とすると，

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & * \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & \lambda_n\end{bmatrix}\qquad \text{なので}\qquad D^k=\begin{bmatrix}(\lambda_1)^k & & & & \\ & (\lambda_2)^k & & & * \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & (\lambda_n)^k\end{bmatrix}$$

となる．ここで $f_{A^k}(\lambda)=f_{D^k}(\lambda)$ に気をつければ

$$f_{A^k}(\lambda)=f_{D^k}(\lambda)=\bigl((\lambda_1)^k-\lambda\bigr)\dots\bigl((\lambda_n)^k-\lambda\bigr)$$

すなわち，f_{A^k} の根は $(\lambda_1)^k$, ..., $(\lambda_n)^k$ である．(この講義での固有多項式の定義に従えば，ご質問の $f_A(\lambda)$ は A が奇数次のときに符号が違います．本によっては $f_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ としていまして，その場合はご質問の式になります．)

質問： 前回の問題 8-6 の 5 番目ですが，以下の解答で正しいですか？この行列の固有値が $\cos\theta+i\sin\theta$ となり，$\sin\theta\neq 0$ のときを考えて固有値 $\cos\theta+i\sin\theta$ に関する固有ベクトル $\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$, 固有値 $\cos\theta-i\sin\theta$ に関する固有ベクトル $\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ となるので，$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\-i & i\end{bmatrix}$ とすると $P^{-1}AP=2\begin{bmatrix}e^{i\theta} & 0\\0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}$

お答え： $\sin\theta=0$ の場合はどうなるでしょう．なお，最後の対角行列の 2 倍は不要．対角化された行列の対角成分はもとの行列の固有値のはずだから明らかに間違いですね．P^{-1} の計算が間違っていませんか ($\det P=2i$ です).

10 対称行列の対角化

■復習 ここでは，$\mathbb{C}^n$ に標準内積 (,) が与えられているとする：$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$．このとき，任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ とスカラ $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ．一般に複素数を成分とする n 次正方行列 A と $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y}) \qquad (A^* = {}^t\overline{A})$$

が成り立つ．

■エルミート行列と対称行列 複素数を成分とする正方行列 H が**エルミート行列** a Hermitian matrix である，とは $H^* = H$ が成り立つことであった．一方 H が**対称行列** a symmetric matrix であるとは ${}^tH = H$ が成り立つことである．

この講義では，とくに断らない限り**対称行列は成分が実数のもの**のみを考えることにする．すなわち，ここで扱う対称行列は**成分が実数であるエルミート行列**である．対称行列の成分がとくに実数であることを明示する場合は**実対称行列**という語を用いる．

命題 10.1. エルミート行列の固有値は実数である．とくに実対称行列の固有値は実数で，対応する固有ベクトルとしてすべての成分が実数であるものが取れる．

証明： エルミート行列 H の固有値の一つを $\lambda \in \mathbb{C}$, 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ とすと

$$(H\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2, \qquad (H\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, H^*\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, H\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \bar{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2.$$

とくに $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ なので $\lambda = \bar{\lambda}$ を得る．したがって λ は実数である．とくに H が実対称行列の場合は，$H - \lambda I$ は実行列なので，方程式 $(H - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は実数の範囲で解をもつ．

定理 10.2. エルミート行列はユニタリ行列により対角化される．とくに，実対称行列は（実）直交行列により対角化される．すなわち，実対称行列 H に対して，直交行列 P で $P^{-1}HP = \Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})$ となるものが存在する．

証明： 前半は定理 9.6 の特別な場合．後半は，固有値が実数になること（命題 10.1) に注意して，(1) 定理 9.2 の証明をきちんとフォローすると与えられた行列が実直交行列によって上三角行列にすることができること，(2) 定理 9.6 の証明をこの場合に適用するとその上三角行列が実は対角行列なることからわかる．

系 10.3. n 次実対称行列 H の固有値 $\lambda\ (\in \mathbb{R})$ の重複度が m であるとき，H の，固有値 λ に関する固有空間

$$W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid H\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の m 次元部分空間である．

証明： 直交行列 P によって $P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ （$\lambda_1 = \dots = \lambda_m$, $j > m$ なら $\lambda_j \neq \lambda_1$) と対角化されているとする．直交行列 P は正則なので

$$(H - \lambda_1 I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \qquad \Leftrightarrow \qquad P(\Lambda - \lambda_1 I)P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\Lambda - \lambda_1 I)P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

2012 年 12 月 6 日

であるが，対角行列 $\Lambda - \lambda_1 I$ は，最初の m 個の対角成分が 0 で，それから下は 0 でない．したがって

$$\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\Lambda - \lambda_1 I)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}\} = \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m \rangle \qquad (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の標準基底})$$

なので，

$$W_\lambda = \langle P\boldsymbol{e}_1, \dots, P\boldsymbol{e}_m \rangle.$$

系 10.4. 実対称行列の，相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する．

証明： 直交行列で対角化可能であることを認めれば容易だが，直接証明することもできる：実対称行列 H の 2 つの固有値 λ, μ $(\lambda \neq \mu)$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とすると，

$$(H\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad (H\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

ここで $\lambda \neq \mu$ なので $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

■例題 実対称行列を直交行列で対角化するレシピ recipie はテキスト 151 ページ．

対称行列

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{とおくと} \qquad P^{-1}HP = {}^tPHP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

問題

10-1 正方行列 A が $A^* = -A$ を満たすとき，A は**歪エルミート行列** a skew Hermitian matrix という．とくに A が実行列のとき，${}^tA = -A$ を満たす行列を**交代行列** a skew symmetric matrix とよぶ．これらの行列の固有値はどんな数になるか．

10-2 ユニタリ行列，（実）直交行列の固有値はどんな値になるか．

10-3 3 次の実直交行列 A が $\det A = 1$ を満たしているとする．このとき，A の固有値のうち一つは 1 であることを示しなさい．（ヒント：固有多項式が実係数であることから，λ が固有値なら $\bar{\lambda}$ も固有値．さらに行列式の条件から，すべての固有値の積は 1; さらに一般化された命題が，テキスト 157 ページ 6.11.）

10-4 テキスト 151 ページ 例 12, 152 ページ 問 14, 156 ページ 6.5.