2012 年 12 月 13 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 11

お知らせ

- 度々申し訳ありませんが，今回も都合により提出物の受付を中止させていただきます．
- 本日は中間試験の予告をいたします（した）．出席されなかった方は web ページ，OCW の 12 月 13 日分の資料から予告の用紙をダウンロードし，印刷しておいてください．
- 講義日程表を少々変更しました．講義 web ページまたは OCW からダウンロードしてください．

前回までの訂正

- 講義資料 10, 4 ページ，8 行目：

$$(H\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}, \qquad (H\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},H\boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{x},\mu\boldsymbol{y}) = \mu\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}.$$
$$\Rightarrow \qquad (H\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \qquad (H\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

- 講義資料 4 ページ，問題の前：

$$P = \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

授業に関する御意見

- 先輩が失踪した場合はどうしたらいいですか．
  山田のコメント： なんとも言えません．あなたが何らかの責任のある立場なら然るべき所に相談してみては?
- 試験範囲広いですね（^^;） **山田のコメント：** まぁそうですね．
- 冬は一層眠れなくなりますね． **山田のコメント：** me, too
- ぼくは TOEIC が 300 点台なので日本語で授業をお願いします．
  山田のコメント： それはまずいのでは? いずれにせよ，講義と資料は日本語です．
- 略（山田注：ドラえもんの絵） **山田のコメント：** 著作権上問題がありますので，掲載は控えます．

質問と回答

質問： 講義資料の問題 10-1 について，「歪エルミート行列 A の固有値を $\lambda \in \mathbb{C}$，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ とすると，

$$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \lambda\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \lambda|\boldsymbol{x}|^2, \qquad (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},A^*\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},-A\boldsymbol{x}) = -\bar{\lambda}|\boldsymbol{x}|^2.$$

$|\boldsymbol{x}|^2 \neq -$ なので $\lambda = -\bar{\lambda}$ であるから λ は純虚数である，で正しいですか?

お答え： 正しいです．この講義の記号ですと $||\boldsymbol{x}||$ ですね．

質問： ユニタリ行列の固有値は，H をユニタリ行列として

$$(H\boldsymbol{x},H\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\bar{\lambda}||\boldsymbol{x}||^2, \qquad (H\boldsymbol{x},H\boldsymbol{x}) = (H^*H\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = ||\boldsymbol{x}||^2$$

より $\lambda\bar{\lambda} = 1$ より $\lambda = e^{i\theta}$ ですか?

お答え： 筋は ok です．ただし，λ, $\boldsymbol{x}$ が未定義．それから θ が実数であることを注意したほうがよいですね．

質問： 講義資料 10, p. 3 系 10.3 「$\mathbb{R}^n$ の m 次元部分空間である」は正しくは「$\mathbb{R}^n$ の m 以下の次元の部分空間である」ではないですか?

お答え： いいえ．必ず m 次元になります．（論理的には「正しくは」以下も正しいですが，それより強いことを言っています．）対角行列 $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ の最初の m 個の対角成分が互いに等しい，すなわち $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m$ としておくと，$\Lambda - \lambda_1 I$ の階数は**ちょうど** $n - m$ であることに注意します．（第 9 回の講義の状況では，上三角行列を考えていたので，この階数が $n - m$ 以上になることしか言えていませんでした）．

質問： 複素ベクトル空間の内積の —— はどうなりますか．定義 CI-1 より $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の関係はどうなりますか．

お答え： 一般の（抽象的な）複素ベクトル空間の要素 $\boldsymbol{a}$ に対して $\bar{\boldsymbol{a}}$ をどう定義するかは自明でないですね．ここでは簡単のため $\mathbb{C}^n$ の標準内積を考えます．すると $\left(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}\right) = \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$ が成り立ちます：$\left(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}\right) = {}^t\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\bar{\boldsymbol{b}}} = \overline{{}^t\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{b}}} = \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$.

質問： eigenvalue と eigenvector は日本語で何といいますか?

お答え： 固有値 (こゆうち)， 固有ベクトル（こゆうべくとる）．

質問： log の記号があまりメジャーでないならばどのような記号が主に用いられているのですか．

お答え： ちょっと説明不足でしたね．メジャーじゃないのではなく「ほとんどどんな文脈でも共通」とはいいきれない，ということです．“log” と書くと，文脈によってそれは「常用対数」だったり「自然対数」だったりします．情報理論などでは底が 2 のときに底を省略したりすることもあります．そして log が常用対数を表すような文脈では，自然対数を “ln” で表すのが普通のようです．

質問： $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ とありましたが，a 列の値はどうして同じ行の b 列, c 列，d 列の値を足した値にしても行列全体の行列値としては同じと言えるのでしょうか．

お答え： 行列値ではなく行列式．a 列，b 列... ではなく，第 1 列，第 2 列... というのが普通（エクセルではない）．ご質問の内容は多分，行列式の基本性質（テキスト 64 ページ，定理 3.15 の C2）です．

11　2 次形式

今回は，スカラとして実数のみを考える．

■2 次形式と表現行列　変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する同次 2 次式

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{11.1}$$

を **2 次形式** a quadratic form という．式 (11.1) の右辺から x_ix_j および x_jx_i $(i\neq j)$ の項を取り出すと，

$$a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i=(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_ix_j+\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_jx_i$$

となるので，$b_{ij}:=(a_{ij}+a_{ji})/2$ とおけば

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j \qquad (b_{ij}=b_{ji}) \tag{11.2}$$

と表すことができる．これを行列の記法を用いて

$$q(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\dots,x_n],\ B=[b_{ij}]) \tag{11.3}$$

と表すことができる．ここで，$[b_{ij}]$ は (11.2) のようにとることにすれば，B は対称行列である．この対称行列 B を，2 次形式 q の**表現行列** the representative matrix ということにする．

例 11.1. 一般に，2 つの変数 x_1, x_2 に関する 2 次形式は

$$a(x_1)^2+2bx_1x_2+c(x_2)^2={}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} \qquad \left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\right)$$

とかける．

例 11.2. 点 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ を含む領域 D で定義された C^2-級の関数 $f\colon D\to\mathbb{R}$ と $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\in D$ となる $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{h}H_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|^2) \qquad (\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}) \tag{11.4}$$

が成り立つ．ただし $\mathbb{R}^n$ の座標を $\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\dots,x_n]$ と表し，$\boldsymbol{h}$ は列ベクトルとみなしている．ここで，

$$df(\boldsymbol{a}):=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right], \qquad H_f(\boldsymbol{a})=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a})\end{bmatrix},$$

$o(\cdot)$ は Landau の記号である（テイラーの定理 Taylor's formula の 2 次の場合）．とくに f が C^2-級なので f のヘッセ行列 the Hessian matrix $H_f(\boldsymbol{a})$ は対称行列で，(11.4) の 2 次の項は $\boldsymbol{h}$ の 2 次形式である．

2012 年 12 月 13 日

■2 次形式と双線形形式 実数を成分とする n 次対称行列 A に対して

$$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n) \tag{11.5}$$

で定まる写像 $q\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を，**対称双線形形式** a symmetric bilinear form という．対称双線形形式 (11.5) に対して

$$q(\boldsymbol{x}) := q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

とおくと[*1]，q は $\mathbb{R}^n$ の 2 次形式である．これを，対称双線形形式 (11.5) に対応する 2 次形式という．

例 11.3. $\mathbb{R}^n$ の標準内積は，単位行列 I に対応する対称双線形形式で，それに対応する 2 次形式は $||\boldsymbol{x}||^2$ である．一般に $\mathbb{R}^n$ の（標準とは限らない）内積は対称双線形形式である．

■2 次形式の標準形

命題 11.4. $\mathbb{R}^n$ の 2 次形式 q に対して，ある行列 P と実数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ で

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(y_1)^2+\dots+\lambda_n(y_n)^2 \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$$

となるものが存在する．とくに $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ は q の表現行列の固有値である．

証明： 対称行列 A を q の表現行列とする．すると，命題 10.1 および定理 10.2 から

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \mathrm{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$$

となるような直交行列 P と実数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ が存在する．実際 $\{\lambda_j\}$ は A の固有値である．いま $\boldsymbol{y} := P^{-1}\boldsymbol{x} = {}^tP\boldsymbol{x}$ とおくと，

$$q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}({}^tPAP)\boldsymbol{y} = [y_1,\dots,y_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} = \lambda_1(y_1)^2+\dots+\lambda_n(y_n)^2.$$

問題

11-1 例 11.3 を確かめなさい．

11-2 次数 n の対称行列 A, B から定まる対称双線形形式

$$q_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}, \qquad q_B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{y}$$

が一致するための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$q_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = q_B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

が成り立つことである．これを確かめなさい．
（ヒント：必要性はすぐにわかる．十分性は $q_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = q_B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ をよく見れば示すことができる．）

11-3 テキスト 154 ページ，例 14; 問 16, 158 ページ 6.17.

---

*1 とくに誤解の危険はないと思われるので，同じ q の記号を用いる．