2012 年 12 月 20 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 12

お知らせ

- 年内は今回で終了です．次回は 1 月 10 日の**中間試験**となります．どうぞ良いお年をお迎えください．
- 今回の提出物に関する回答は，年内に講義 web ページ，および OCW に掲載します．

前回までの訂正

- 前回の試験予告のうち，答案の返却日，クレイムの締め切りに誤りがありました．返却日は 1 月 24 日，クレイムの締め切りは 1 月 31 日です．

12　対角化の意味・応用

■線形変換の表現行列　線形変換 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n)$ となる n 次正方行列 A が存在する．これを f の (標準基底に関する) 表現行列とよぶのだった（定理 3.12 参照).

いま，$\mathbb{C}^n$ の基底 (定義 2.1) $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ を一つとるとき，この線形写像 f の基底 $\{\boldsymbol{p}_j\}$ に関する表現行列は

$$P^{-1}AP \qquad (P = [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n]) \tag{12.1}$$

と表される（問題 3-8 参照)．このことから，

> 正方行列 A が正則行列 $P = [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n]$ によって対角化される，とは，線形変換 $f : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ に関する表現行列が対角行列となることである．
> このとき，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ とおくと，$f(x_1\boldsymbol{p}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{p}_n) = \lambda_1 x_1 \boldsymbol{p}_1 + \dots + \lambda_n x_n \boldsymbol{p}_n$ が成り立つ．すなわち，$\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_j\}$ に関する第 j 成分は f によって λ_j 倍される．

■2 次形式の表現行列　$\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式 q と対応する双線形形式を考え，その表現行列を A (A は実対称行列) とする (式 (11.3), (11.5) 参照).

いま $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ に対して $b_{ij} := q(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j) = {}^t\boldsymbol{p}_i A \boldsymbol{p}_j$ $(i, j = 1, \dots, n)$ とおくと，$B = [b_{ij}]$ はまた実対称行列である．この B を q の基底 $\{\boldsymbol{p}_j\}$ に関する**表現行列**という．このとき

$$B = {}^tPAP \qquad (P = [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n]) \tag{12.2}$$

が成り立つ．この変換公式は，線形変換の表現行列の変換公式 (12.1) とは異なることに注意せよ．

2012 年 12 月 20 日

表現行列の意味は以下の通り：いま $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{p}_n$ と基底 $\{\boldsymbol{p}_j\}$ を用いて表すと,

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j \tag{12.3}$$

となる．とくに基底 $\{\boldsymbol{p}_j\}$ が正規直交基底 (定義 6.2 参照) ならば，式 (12.2) の P は直交行列 (定義 7.3) なので ${}^tP = P^{-1}$ である．まとめると

> 実対称行列 A が直交行列 $P = [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n]$ によって対角化される，とは，2 次形式 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ に関する表現行列が対角行列となることである．このとき，$P^{-1}AP = {}^tPAP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ とおくと，$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(x_1)^2 + \cdots + \lambda_n(x_n)^2$ が成り立つ.

■応用: 行列の指数関数　複素数を成分とする n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

$$||A|| := \sqrt{\operatorname{tr} A^*A} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \tag{12.4}$$

と定める．特に，各 i, j に対して

$$|a_{ij}| \leqq ||A|| \qquad (A = [a_{ij}]) \tag{12.5}$$

が成り立つ.

補題 12.1. 正方行列 A, B に対して $||AB|| \leqq ||A||\,||B||$ が成り立つ.

証明： $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ とすると,

$$\text{左辺} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}b_{ji}|^2}, \qquad \text{右辺} = \sqrt{\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{k,l=1}^{n} |b_{kl}|^2\right)}$$

となるが，右辺の平方根の中の積を展開して得られる式の中に左辺の項はすべて含まれ，それ以外の項も負ではないので結論が得られる.

次は，(12.5) と 補題 12.1 からすぐにわかる：

補題 12.2. 正方行列 $A = [a_{ij}]$ と負でない整数 m に対して，行列 $B^{(m)} = [b_{ij}^{(m)}]$ を

$$B^{(0)} = I, \qquad B^{(m)} := \frac{1}{m!}A^m$$

で定めると，$|b_{ij}^{(m)}| \leqq \frac{1}{m!}||A||^m$ が成り立つ.

これを用いると,

定理 12.3. 正方行列 A が与えられたとき，各番号 m に対して

$$C^{(m)} := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{m!}A^m$$

とおくと $C^{(m)}$ の各成分 $c_{ij}^{(m)}$ は $m \to \infty$ としたときに収束する.

証明： 補題 12.2 の記号を用いれば

$$c_{ij}^m = 1 + b_{ij}^{(1)} + \cdots + b_{ij}^{(m)} = \sum_{l=1}^{m} b_{ij}^{(l)}$$

となる．ここで，右辺の各項の絶対値をとった級数は，補題 12.2 から

$$1 + |b_{ij}^{(1)}| + \cdots + |b_{ij}^{(m)}| \leqq 1 + ||A|| + \frac{1}{2}||A||^2 + \cdots + \frac{1}{m!}||A||^m \leqq e^{||A||}$$

を満たすので，無限級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}^{(l)}|$ は収束する．したがって，無限級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij}^{(l)}$ は絶対収束する[*1]．

定義 12.4. 正方行列 A に対して

$$e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

と定める．これをまた $\exp A$ と書くこともある．

例 12.5. 対角行列 $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ に対して $\Lambda^m = \mathrm{diag}[(\lambda_1)^m, \dots, (\lambda_n)^m]$ なので

$$e^\Lambda = \mathrm{diag}[e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}]$$

である．

また，上三角行列 T の対角成分が λ_1, ..., λ_n であるとき，T^m も上三角行列で，その対角成分は $(\lambda^1)^m$, ..., $(\lambda^n)^m$ なので，e^T の対角成分は e^{λ_1}, ..., e^{λ_n} である．

例 12.6. 正方行列 A と正則行列 P に対して

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$$

が成り立つ．このことは $(P^{-1}AP) = P^{-1}A^mP$ であることからすぐにわかる．

命題 12.7. 任意の正方行列 A に対して e^A は正則である．

証明： 定理 9.2 より A はユニタリ行列 U によって上三角行列にすることができる：$T = U^{-1}AU$ は上三角行列．T の対角成分を λ_1, ..., λ_n とすると，e^T の対角成分は e^{λ_1}, ..., e^{λ_n} だから $\det e^T = e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} \neq 0$．したがって $\det e^A = \det(Ue^TU^{-1}) \neq 0$.

例 12.8. 行列 A が正則行列 P によって対角化されているとき，$\Lambda := P^{-1}AP = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ とおくと

$$e^A = P^{-1}e^\Lambda P = P^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P$$

となる．

[*1] ここでは数の範囲を複素数としているが，微積分学で学んだ級数の絶対収束の性質は同じように成り立つ．

■2 次曲線　座標平面 $\mathbb{R}^2$ の，2 次式で表される図形

$$C := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r = 0 \right\} \tag{12.6}$$

を考える．ただし a, b, c, p, q, r は実数である．

例 12.9. 式 (12.6) で $a = c = 1, b = 2$ の場合を考える．このとき，C の定義式の 2 次の項たちは

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \qquad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

という形に書ける．対称行列 A は

$$^tPAP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

と直交行列 P によって対角化できるから，

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}, \qquad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)$$

とおくと，C の定義式は

$$-X^2 + 3Y^2 + \sqrt{2}(p-q)X + sqrt2(p+q)Y + r = 0$$

となる．これは双曲線を与えているが，$\boldsymbol{X} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ は平面の回転なので，もとの図形 C も双曲線である．

問題

12-1 式 (12.2), (12.3) を確かめなさい．

12-2 次の行列 A_j に対して e^{A_j} を求めなさい：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12-3 $\mathbb{R}^n$ に値をとる t の関数 $\boldsymbol{x}(t)$ が

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a} \tag{$*$}$$

を満たしているとする．ただし A は n 次の正方行列である．$\boldsymbol{x}(t) := \exp(tA)\boldsymbol{a}$ とおけば，これは $(*)$ を満たしていることを確かめなさい．（実は，これは $(*)$ の唯一の解である）．

12-4 関数 $y = y(t)$ に関する微分方程式 $\ddot{y} = -y$ $(\doteqdot d/dt)$, $y(0) = a$, $\dot{y}(0) = b$ を

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \qquad \left(x = \frac{dy}{dt}\right)$$

と書き換えることによって解きなさい．

12-5 式 (12.6) で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合は

楕円 ellipse / 双曲線 hyperbola / 放物線 parabola / 交わる 2 本の直線 / 平行な 2 本の直線 / 1 本の直線 / 1 点 / 空集合

のいずれかである．これらの各々の例となるような係数 a, b, c, p, q, r の例で $b \neq 0$ となるものをあげなさい．