2012 年 12 月 27 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 12a

前回の補足

- 正方行列 A, B に対して $e^{A+B} = e^A e^B$ が成り立つかというご質問を複数いただきました．一般には成り立ちません．実際

  $e^{A+B} = e^A e^B$ が成立するための必要十分条件は $AB = BA$ が成り立つこと

  です．$AB = BA$ ならばこの等式が成り立つことは（無限級数の議論をきちんとやらなければならないがナイーヴには）次のように示せます：A と B が可換ならば，負でない整数 n に対して二項定理

  $$(A+B)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} A^r B^{n-r} \qquad \left(\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (\text{二項係数})\right)$$

  が成り立つので

  $$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} A^r B^{n-r}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{r} A^r B^{n-r} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{r} A^r B^{n-r} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+r)!}\binom{m+r}{r} A^r B^m \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+r)(m+r-1)\dots(m+1)}{(m+r)!r!} A^r B^m \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!r!} A^r B^m = \left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}A^r\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}B^m\right) = e^A e^B. \end{aligned}$$

  とくに，スカラ s, t に対して

  $$e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A}$$

  となります．
- 講義で扱った微分方程式の例題：

  $$(*) \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a} \qquad (A \text{ は } n \text{ 次正方行列，} \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n\text{，} \boldsymbol{x}(t) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ に値をもつ未知関数})$$

  について．講義では $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{a}$ が解であることを示しましたが，他に解はないのかという質問を複数いただきました．

  一般に，正方行列 A とスカラ s に 対して $e^{sA}A = Ae^{sA}$ が成り立つことに注意しておきます．いま $\boldsymbol{x}(t)$ が $(*)$ を満たしているとする．このとき $\boldsymbol{y}(t) := e^{-tA}\boldsymbol{x}(t)$ とおくと，

  $$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t) &= \left(\frac{d}{dt}(e^{-tA})\right)\boldsymbol{x}(t) + e^{-tA}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = -Ae^{-tA}\boldsymbol{x}(t) + e^{-tA}A\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{y}(0) &= e^{O}\boldsymbol{x}(0) = I\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

  この第一の式から $\boldsymbol{y}(t)$ が一定であることがわかるので，第二式から $e^{-tA}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{a}$．この両辺に e^{tA} を左からかければ $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{a}$．

前回までの訂正

- 講義資料 12, 2 ページ 15 行目：

$$\text{左辺} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2} \leqq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{lj}|^2\right)} = \sqrt{\left(\sum_{i,k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{l,j=1}^{n}|b_{lj}|^2\right)} = \text{右辺}$$

- 講義資料 12，4 ページ，問題の 2 行上：$sqrt2 \Rightarrow \sqrt{2}$
- 講義資料 12, 問題 12-4: $\doteq d/dt \Rightarrow \dot{} = d/dt$

授業に関する御意見

- よいおとしを
- 先生もどうぞ良いお年をお迎えください．

  山田のコメント： ありがとうございます．皆様良いお年をお迎えください．

質問と回答

質問： 正方行列 A, B に対して $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ が成り立ちますか?

お答え： 一般に $e^A \cdot e^B$ と e^{A+B} は成り立ちません．2 次行列の実例で試してご覧なさい．ここでは証明を与えませんが，$e^Ae^B = e^{A+B}$ が成立するための必要十分条件は $AB = BA$ が成り立つこと，すなわち A と B が可換となることです．したがって，$e^Ae^A = e^{2A}$ は成立します．

質問： 指数法則に $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (m,n は自然数) がありますが，これは今回の授業で扱った e^A (A は $m\times n$ 行列) などに適応することはできますか．たとえば $e^Ae^A = e^{2A}$ とはできない気がするのですが，私の勘違いでしょうか．

お答え： 上の質問の回答参照．ここで，指数法則は実数の指数に対して成り立つことは大丈夫ですね．

質問： 式 (12.3) の b_{ij} は何を指しているのかよく分かりません．b_{ij} とは何のことですか?

お答え： 前のページ，下から 4 行目．記号がわからないと思ったらしばらく前まで遡ろう．

質問： Find $y = y(t)$ satsifying (*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -y$, $y(0) = 1$, $\dfrac{d}{dt}y(0) = 1$ の最後は $y(0) = 1$ なので $\frac{d}{dt}y(0) = 0$ になると思います．

お答え： この記号の意味は (実際に問題を解く過程からわかりますが) $y'(t)$ の $t = 0$ での値という意味のつもりです．したがって $y(0) = 1$ だからといって 0 になるとは限りません．

質問： 問題 12-4 についての質問です．$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{tA}\boldsymbol{a}$ $\left(\boldsymbol{a} := \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$ とおけるのはなぜですか．確かに $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = Ae^{tA}\boldsymbol{a} = A\boldsymbol{x}(t)$ になるというのは分かりますが，それ以外に $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{a}$ と納得できる根拠を知りたいです．僕には $\ddot{y} = -y \Leftrightarrow \dot{y} = -\frac{y^2}{2} + \dot{y}(0) \Leftrightarrow y = -\frac{y^3}{6} + \dot{y}(0)y + y(0)$ と解いたほうが楽に思えてなりません．

お答え： 前半は「前回の補足」参照．後半：楽かどうかはわかりませんが**間違っています**．まず $y = y(t)$ (t の関数) の形でもとまっていませんね．ですから方程式は解けていないわけです．さらに

$$\ddot{y} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -y(t) \qquad \text{の両辺を } t \text{ で積分すると} \qquad \int \frac{d^2y(t)}{dt^2}dt = -\int y(t)\,dt$$

となり，左辺は $dy(t)/dt$ に定数を加えたものになりますが，右辺は $-y^2/2$ にはなりません．右辺の dt は dy でないことに注意しましょう．

質問： 前回の講義 A positive definite $\Rightarrow \det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$, $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leftarrow$ この部分がよくわかりません．教えてください．

お答え： 定理 9.13.

質問： 系 11.7 を示すため，A は正値 $\Rightarrow \det A$ かつ $\operatorname{tr} A$ かつ $a_{11} > 0$ かつ $a_{22} > 0$ を示すとき（後略)

お答え： “$\det A$ かつ $\operatorname{tr} A$” とは何でしょうか．“$\det A > 0$ かつ $\operatorname{tr} A > 0$” なら意味があります．示すべきことは，(0) 2 次実対称行列 $A = [a_{ij}]$ が正値であることと (1) $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$ であること，(2) $\det A > 0$, $a_{11} > 0$ であること，(3) $\det A > 0$, $a_{22} > 0$ であることのそれぞれが同値ということです．命題のステートメントくらいはきちんとかけるようにしましょうね．

(0) $\Rightarrow$ (1): A が正値ならば A の固有値（実数）はすべて正．$\det A$ はすべての固有値の積，$\operatorname{tr} A$ はすべての固有値の和だから (1) が成り立つ．

(1) $\Rightarrow$ (0): A の固有値 λ_1, λ_2 (A が 2 次なのでふたつ) はともに実数．(1) が成り立つので $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$, $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ だから，第一式から λ_1, λ_2 は同符号，第二式からその符号は正なので A のすべての固有値は正．したがって A は正値.

(1) $\Rightarrow$ (2): $\det A > 0$ ならば $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. したがって $a_{11}a_{22} > 0$ なので a_{11}, a_{22} は同符号．さらに $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} > 0$ だから $a_{11} > 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\det A > 0$ ならば a_{11}, a_{22} は同符号．とくに $a_{11} > 0$ ならば $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} > 0$.

質問： 2 次曲線の応用例で P は A を対象行列（原文ママ：対称行列のことか）にすることで A を対角化でき，なおかつ直交行列で $\overrightarrow{X} = {}^t P\boldsymbol{x}$ は平面の回転を表すことになるといういことですか? そうならなぜ A を対象行列にすることで $\overrightarrow{X} = {}^t P\boldsymbol{x}$ は平面の回転を表せるようになるかが分かりません.

お答え： 書かれている日本語の意味がとれません．最初の文 の「平面の回転を表す」の主語はなんでしょう．ごちゃごちゃ書いてありますが「対称行列 A は直交行列 P で対角化できるが，P は平面の回転を表す」ということ以上のことは言っていませんよね．前半は第 10 回講義，後半は例 7.6.