

2013 年 4 月 16 日 (2013 年 4 月 23 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 2

お知らせ


- いただいた質問, ご意見はこのようにプリントして配布しますし講義 web ページ, OCW にも掲載します. こちらも目を通してください.
- 提出された用紙は返却します. そこにも赤字でコメントが入っているかも知れませんが, それは山田用のメモです. こちらの資料の回答, コメントを見てください.
- 授業に関するご要望のうち山田が解決できないものは担当者に伝えました. 改善されるはずですが.
- 教科書未購入者が 71 名. 買ってください.

前回までの訂正

- 背理法の説明で「有理数」と「無理数」をいい間違えていたそうです.
- 板書: X is a set real numbers $\Rightarrow X$ is a set of real numbers
- 講義ノート 4 ページ 12 行目: $x \rightarrow \sqrt{x} \Rightarrow x \mapsto \sqrt{x}$.
- 講義ノート 5 ページ 4 行目: $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- 講義ノート 8 ページ 問題 1-10: 平方して x となる実数 \Rightarrow 平方して x となる負でない実数
- 「有理数」を「整数/整数」と説明したところ, 分母が 0 の場合はまずいというご指摘をいただきました. おっしゃる通りです. いい加減に述べれば「整数/整数」でもいいのかも知れませんが, 「 m/n , ただし m, n は整数で $n \neq 0$ 」というべきでしょう. 「整数/自然数」というご提案もありましたが「 $3/(-2)$ 」をどう扱うか, という面倒くささがあります. もちろん「商」をどのように意味づけるか, という問題もありまして深入りすると大変です.
- 授業日程の 2 番目の注釈 (電力逼迫による休日授業) は 2011 年度のものでした. 再利用がバリエーション.

授業に関する御意見

- カメラの人の無線通信がうるさいです.
- 最後列の端の辺りに座っていたのですが, カメラマンさんに他のスタッフが連絡する声が聞こえてきたのが少しだけ気になりました. 配信のためには仕方ないと思いますが.
山田のコメント: 山田は仕方ないとは思いません. 対応お願いします > 担当の方.
- 眠くならないように講義室を改善してほしい (まどを開ける等)
- 教室内が少し暑いですが. 少しクーラーを強くしてもらえると助かります.
- エコでない意見で申し訳ありませんが, 教室 (講義室?) が暑かった.
- 冷房を強くしてほしいです/教室が暑い/部屋が暑かった/ 次から室温調節をよろしくお願いします.
山田のコメント: 担当者に伝えました.
- ちょっと暑いと思うけどまだいける. 山田のコメント: 無理しないでください.
- まだ暑いですが. 眠いです. 声が小さいです. 山田のコメント: 了解.
- 少し声が聞こえづらかったのでマイクの音量を上げた方がよいと思います/もう少し大きい声で話して下さい.
山田のコメント: 了解. 担当の方, お願いいたします.
- 初回だから授業が簡単であったため眠かったです. 山田のコメント: 本当に簡単だった?
- 本格的な授業が始まるのが待ち通しい (原文ママ: 待ち遠しいのことが) 山田のコメント: 今回も本格的かもしれません.
- 授業時間が長すぎて集中力がきれます. 山田のコメント: どうしたらよいだろう. アイデア募集.
- 演習問題は授業で解説するのでしょうか?
山田のコメント: この用紙にてリクエストがあれば解説します. 「頭と手を動かしてどこまで考えたか」を記して下さい.

- あげ足取りの授業になってしまいそうで、放送でただでさえ緊張するのにつらいです。黒板の内容も訂正されないのでは？あと、ベクトルはドイツ語由来ではないかと（辞書ではドイツ語とてました）でもこの授業ではなぜ先生が疑問に思うのか分かりかねるので、ご期待に添えないですね。多分。
山田のコメント： なにがどうあげ足とりなのでしょう。こちら也十分に足を上げていますので、指弾していただきたい。黒板の内容の件「訂正されない」という想像はどこからきていますか？皆さんの指摘で（この資料を通して）どんどん訂正していきます。ベクトルの件、質問と回答参照。
- 「戦後」は「第二次大戦後」であることは私には自明ですが、皆さんには自明でしょうか？ 山田のコメント： どうですか？
- 「講議」ではなく「講義」頭に入れておきます。 山田のコメント： いれてくださいね♡
- まあ、楽しい購議だと思いますよ/いい講議でした!!
山田のコメント： ネタですよ。...“構議”もありました。いずれにせよ「お遊びはこれまでだ」次回以降は指弾します。
- 配信されていると聞いたので、少し緊張します/ カメラがあるので緊張します。 山田のコメント： me, too
- 映像があるので静かにうける。 山田のコメント： そうですか。べつに静かにしなくてもよいのでは？
- カメラがあって少し緊張しますが、先生と楽しく学んでいきたいと思えます。 山田のコメント： よろしく。
- よろしくお願います。高校の先生に衛星授業の件お話ししました。 山田のコメント： こちらこそ/Thanks
- 字を読むように書くよう、がんばります。 山田のコメント： そうしてほしい。
- 頑張るのだからよろしくお願います。あいさつしてもらえると嬉しいです！
山田のコメント： なるべく挨拶はしたいと思いますが、100人超の人の顔を瞬で覚えられるほど若くはないので、気が付かなかっただけでお許しください。
- よろしくお願います(2件) 山田のコメント： こちらこそ。
- トクになし。 山田のコメント： me, too
- 授業の所々で小バカにしてくるので先生の頭の良さが伺えた。 山田のコメント： せいぜいこの程度。大馬鹿にしているかも。
- もっと、かたい授業を予想していたが、適度にやわらかく面白かったです/ とても機知に富んだ楽しい講議でした。
- とても面白く、興味の持てる授業です/ 冗談がとてもおもしろかった/楽しかった/楽しかったです。
山田のコメント： Thanks. まだまだ修行がたりませんがよろしく。
- 日々新しいものを提供してください。 山田のコメント： 週に1回なので、日々は無理かと思えます。
-  じゃがじゃが 山田のコメント： 了解(何が?)

質問と回答

集合や写像のこと

質問： $A \subset B$ が $A = B$ を含むとすると $A \subset B$ かつ $A \neq B$ を表すときにやや面倒になりませんか？

お答え： $A \subsetneq B$ や $A \subset B$ と書きます。これが必要な場合は $A \subset B$ ($A = B$ も含む) より少ないように思います。

質問： (1) $x \in \mathbb{R}$ (2) $X \subset \mathbb{R}$ で (1) の x を要素、(2) の X を部分集合とっていましたが、いまいち (1) と (2) の違いが分からないので教えてください。

お答え： いまいち、ということは少しはわかっているのでしょうか。どの程度わかっているか教えてください。(1) の x は(この場合)「実数」です。 $1 \in \mathbb{R}$ とか $\pi \in \mathbb{R}$ は正しいです。一方(2) の X は「集合」です。 $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ や $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ (後者は区間のこと)は正しいのですが、 $1 \subset \mathbb{R}$ は正しくありません。要素を一つだけもつ集合 $\{1\}$ を考えれば $\{1\} \subset \mathbb{R}$ ですが、この $\{1\}$ は集合であって数そのものではないので $\{1\} \in \mathbb{R}$ は正しくありません。

質問： 要素と部分集合の違いは、要素は特定の数と集合の関係で、部分集合は集合と集合の関係ということで正しいでしょうか。 お答え： 正しいです。一つ前の質問と回答参照。

質問： $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ の I は何を表しているのですか？ お答え： 文脈から切り取られると曖昧ですが、区間 interval。

質問： 矢印 (\rightarrow , \mapsto) に関する質問です。定義域、値域に関するものは \rightarrow 、要素に関するものは \mapsto で良いのですか。もしそうなら、例えば二変数関数で $(x, y) \mapsto f(x, y)$ の様に \mapsto を用いるのはなぜですか。

お答え： (x, y) が定義域の要素だからです。二変数関数の定義域は \mathbb{R}^2 の部分集合、すなわち \mathbb{R}^2 の要素の集まりです。 \mathbb{R}^2 の要素は“(x, y) (x, y は実数)”という形をしています。(1, 2) は \mathbb{R}^2 の一つの要素です。たとえば $f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ とすると、 f は \mathbb{R}^2 の一つ一つの要素 (x, y) に $x^2 + y^2$ という数を対応させる規則です。

質問： 関数を「ある数をもうひとつの数に対応させる規則」ではなく、ある数に対して行う手続き (procedure) と見なすことは問題はあるか。

お答え： あると思います。手続きというと、 x に対して $f(x)$ を求める手段が具体的に与えられているというように思えますが、そうでなくても関数が決まることあるからです。例えば例 1.2 の最後の例：「負でない実数 x に対して平方して x になる負でない実数に対応させる」という文の中にはその値を具体的に求める方法は与えられていません。それでも関数が決まっていると思う、というのが数学の流儀です。

質問： 1 回目の授業は関数の定義付けのような内容で、関数は定義域の実数に対して対応した値のあつまりということでしたが、それでは円 $x^2 + y^2 = 1$ は定義域 $-1 \leq x \leq 1$ に対して y が 1 対 1 に対応していないので関数とは呼べないのでしょうか。

お答え： 「関数は定義域の実数に対して対応した値のあつまり」なんてどこでも言っていないし、講義ノートにも書いてありません。嘘を言わないこと。ご質問は “ $-1 \leq x \leq 1$ を満たす x に対して $x^2 + y^2 = 1$ を満たす実数 y を対応させる” という規則は関数と呼ぶか、と解釈しますと、回答は “呼びません”。

定義域と値域

質問： 講義資料 3 ページ、例 1.1 で “ f は定義域を \mathbb{R} 、値域を \mathbb{R} とする関数である” と書いてありますが、 $x \in \mathbb{R}$ なら $x^2 > 0$ (原文ママ $x \geq 0$ のことか) なので $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ かつ正 とはならないのですか？

お答え： 矢印の使い方が間違っています。“ f は \mathbb{R} のに \mathbb{R} の要素を対応させている” ことは間違いないので、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ といってよいのです。関数の “値域” はその範囲全体に写っていないでもよい、という概念です。ご質問の “ \mathbb{R} かつ正” とは “ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ” のことと察しますが、これは例 1.1 で述べている f の像にあたります。この授業では、このように “値域” と “像” という言葉を使い分けますが、人や本によっては “像” の意味で “値域” という語を使う場合があります。また、最初から負でない実数に値をとる、と考えて $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ と、値域を \mathbb{R} の部分集合と考える場合もあります。

質問： (資料 第 1 回, 例 1.4 より) $f_3(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ と定めると $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であるとありますが、 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ となる条件は $x \in \mathbb{R}$ と $f_3(x) \in \mathbb{R}$ であり、 $\{f_3(x) \text{ の全要の集合} \} = \mathbb{R}$ である必要はないという事ではないのでしょうか。お願いします。

お答え： “ $\{f_3(x) \text{ の全要の集合} \} = \mathbb{R}$ ” は何かおかしいですね。“ $\{f_3(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ” です。回答は “よいです”。すなわちこの集合は値域と一致する必要はありません。

質問： (2 ページ, 5~8 行目) $f(x)$ の範囲を値域、 x が定義域全体を動くとき $f(x)$ が動く値域の中の範囲を像とよぶと、値域と像の区別がわかりません。値域の場合も x が定義域全体を動くと考えてはいけいではないのでしょうか。

お答え： 例 1.1 のように使い分けをします。たとえば \mathbb{R} $f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 6$ で与えられる、 \mathbb{R} を定義域とする関数 f の像は \mathbb{R} 全体ではありませんが、それを特定するのはそう簡単ではないでしょう。でも $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と書いておきたいではないですか。

質問： 6 ページ 3 行目は \mathbb{R}^n ではないのですか？ お答え： 違います。値はひとつの実数なので、矢印の右側は \mathbb{R} です。

数について

質問： $\pm\infty$ は実数ですか？ お答え： ちがいます。講義ノート 4 ページ, 脚注 6.

質問： 授業中、「有理数でない数」には複素数も含むと言っていましたが、一般的には「数」とはどのような集合を指すのですか。

お答え： それが曖昧。文脈に依存します。したがって、正確さが要求される場面では、単に “数” といっけいはいけません。また、単に “数” とあつたら、それが何を表すかを文脈から判断する必要があります。

質問： 有理数、無理数、実数はどういう数であるかはっきりしているんですが、虚数はどういう数であるのでしょうか。平方したら負になることのみしか分かりません。 お答え： “虚数” は “実数でない複素数” の意味で用います。

質問： 「複素数でない」という定義に当てはまるものはありますか？

お答え： “定義” という語の使い方がおかしいです。ご質問への回答： たいていのは複素数ではないと思いますが。

多変数関数

質問： 3 変数関数のグラフは書けないのですか？

お答え： “書ける” という語の意味にもよります。 \mathbb{R}^4 の部分集合ですから 1 変数関数のグラフのように気軽にはかけませんが、あなたの心の中には書けるかもしれません。

質問： 多変数関数では高校のようにグラフ利用し、グラフから情報をもろうことはできなくなるのですか？

お答え： はい。できなくなると思ってください。

質問： 変数関数 (原文ママ) のグラフの説明の箇所 “ $f_4 =$ 東経 x 度, 北緯 y 度, 標高 z m の場所の気圧” は 3 変数関数だとおっしゃってましたが、この場合は z は x と y の値によって一義的に決まるので 2 変数関数ではないのでしょうか？

お答え： 表現が不正確だったようです。“東経 x 度, 北緯 y 度, 地表から高さ z m の点での気圧” を意味していました。

質問： 2変数関数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ のグラフを描こうという試してみたがうまく描けなかった。時々、立体が思うように描けなくてもどかしい思いをすることがあるのだが、何かコツなどがあったりするのだろうか。今回の授業の内容は、プログラミング等でなんとなく理解していた分野であったため、内容について困った点は無かった。

お答え： 空間図形を描くのはやはり難しいと思います。平面 $x = c$ で、 f のグラフをきると、切り口は $\{(c, y, c^2 - y^2) \mid y \in \mathbb{R}\}$ となり、平面 $x = c$ 上の放物線を表します。このように地道に切り口を考えていくのも方法です。

質問： 座標平面、空間上における乱雑な点の集合はグラフと呼べるのか。

お答え： この授業では“グラフ”という語を単独では使いません。“関数 f のグラフ”という形で使います。したがって、この質問は意味を持ちません。また“乱雑な点”とはどんなものがわかりませんのでお答えしかねます。

質問： 授業プリント p. 6, p. 7 に“性質のよい”関数という記述がありますが、ここで言われる“性質”の良し悪しとは具体的にどういったことで、どのような要素から判断されるのでしょうか。プリントの方に補足も記述もなかったため気になった次第です。

お答え： ここでは“微分可能性”を想定しています。しかし、微分可能性は（とくに多変数関数に関しては）まだ定義されていないのでこのような奥歯にももの挟まったような言い方にしました。

質問： 講義で配られた資料の中に“性質の良い”関数というワードがありましたが、例 1.6 の

$f(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$ は“性質”のよい関数ですか？わるい関数ですか？

お答え： ひとつ前の質問と回答参照。地形は“なめらかな曲面”と思えるかどうかで“性質”の良し悪しが決まるでしょうね。ちなみに、ここでの f の引用は間違っています。これでは f の一つの点での値しか指定していませんので、関数 f が定義されません。例 1.6 を引用するなら最初の 2 行だと思います。

質問： (1) 「 $\{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \subset \mathbb{R}^2$ 」の意味がわからないので詳しく教えてください。(2) 「要素」と「部分集合」の違いも理解できませんでした。(3) 2変数関数のグラフを上手に描く方法を教えてください。

お答え： (1) 「等式 $f(x, y) = c$ を満たす (x, y) 全体の集合」でこれは「 \mathbb{R}^2 の部分集合である(念の為)」。(2), (3) はこのプリントのどこかに回答があります。

記号と用語

質問： $x, y, z \in \mathbb{R}$ のような「,」の使い方は正しいですか。($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$ のようにしななければならないわけではないのですか。)

お答え： 文脈から明らかな場合の略記法とってください。誤解の恐れがあるなら 3 つ並べた方がよいかも知れません。

質問： エックスのことを僕は \times と書きます。 \times と \times どっちで書いた方がいいんですか？先生は \times だったので、僕も \times に直した方がいいですか？

お答え： 曖昧でなければ、どちらでもよいです。

質問： f が \mathbb{R}^2 の各点に対して実数が対応しているときに f を \mathbb{R}^2 上の「スカラ場」というそうですが、なぜ場 (field) という語を用いるのでしょうか。数学の用語またその漢字にはそのバックに歴史があることが今回の講義でわかりました。そのため「場 (field)」という単語を採り入れることになった経緯が気になりました。回答をお願いします。

お答え： 物理学の用語からと想像します。電場や磁場など、空間が何かの性質を帯びているとき、その空間を“場”と呼びます。定量的に述べれば“空間の各点に対して物理量が一つ一つ対応している”状態が“場”です。例えば、電場は、空間の各点に電場ベクトルと呼ばれるベクトルが対応しています。特に対応している物理量がスカラ(数)であるときは、“空間の各点に数が対応している”すなわち \mathbb{R}^3 (の部分集合) 上で定義された関数と見なせます。そこで、数学では、空間(平面)上の各点に実数が対応している状態を空間(平面)のスカラ場と呼ぶのです。

質問： 問題 1 について 1-3 のスカラ場の定義がよく分からなかった。また、大学の数学はすごく抽象的だと思った。

お答え： 前半：講義ノート 7 ページ。後半：だからわかりやすい。具体的なものは難しいと思います。

質問： Vector はドイツ語で「ベクトル」英語で「ベクター」とよみ、日本は最初ドイツ語で数学・物理を研究しはじめたそうなのでベクトルとよむのが主流なのだそうです。同じようなものに pH (ペーハー、ピーエイチ) などがあるそうです。

お答え： 出典はなんでしょう。ドイツ語のベクトルは der Vektor (定冠詞は男性名詞であることを示すため) と綴るはずですが、教科書で習うドイツ語の発音規則にしたがって発音すると“フェクトア”のような音になりますね。(Volkswagen は“フォルクスヴァーゲン”) が、辞書を引くと“ヴェクトア”のような発音する (V を濁って発音する例外) そうです。例外だということは外来語であることを示しているように思うのですが、どうなのでしょう。いずれにせよ“Vektor”から“ベクトル”というカタカナは出てこないと思います。ということで最初の疑問に戻る。山田が知る限り“ベクトル”に最も近い発音のヨーロッパ言語はスペイン語なんですね。

授業のことなど

質問： 演習はどれくらい必要ですか。 お答え： とっても必要です。

質問： 大学数学を学ぶ上で、高校数学と違う点で、気をつけた方がよいことはありますか。

お答え： 高等学校で学んだ知識はすべて前提ですので、完全に理解しておいてほしい。

質問： 「質問はありません」と書いた場合何点もらえますか。 お答え： 0点

質問： 質問用紙の質問欄を白紙で提出した場合、未提出よりはマシですか？

お答え： いいえ。ただ「ご意見」の欄に書いていただいたことは検討の対象とします。

質問： 晒されると聞いてましたが、こちらにカメラが向けられるわけでもなく、ただ先生が「おはよう」と言うだけなのですか。もしそうだとしたら、朝マックの時間が過ぎているのに「おはよう」と言った先生が晒されているだけではないですか。

お答え： そうかもしれませんが。ただ、遅刻者があまり多いと「東工大の学生はルーズ」という宣伝となります。

質問： カメラ写りたくないのですが、後ろの席に座っていいでしょうか？ お答え： どうぞ。私もいいですか？

質問： 授業で配布された資料にある“問題”は取り組むべきでしょうか。また、何かの参考書等による予習は必要と先生はお考えになられますか。

お答え： 取り組むべきです。まずは講義ノートをじっくり読んでから考えて下さい。

質問： 予習はした方がいいですか。教科書は買った方がいいですか。

お答え： 前半：講義概要 2 ページ 5 行目を見よ。後半：買って下さい。

質問： あの講義（もちろん原文ママ）は全国で放送されるのですか？ お答え： Cradle の web ページをご覧ください。

質問： この質問用紙は「前回までの」内容に対する質問で「今回」の内容は含まれないのでしょうか？

お答え： あいまいですが、今回で結構です。講義が終わってしまったら今回でなく前回になってしまうのでは？などと考えだすとよくわからなくなってしまいます。

質問： ホワイトボードの方が使いやすいと思うんですが、撮影のため黒板を使ってるんですか。

お答え： 黒板の方が使いやすいので、無理をいって黒板を使わせていただいています。

質問： 第 1 回のノートは 8 ページまでなんですが、第 2 回のノートは 10 ページから始めてるのは間違いでしょうか？

お答え： いいえ。第 1 回のノートの最後の白紙が 9 ページです。

質問： 問題をどう解くかわからないです。教えて下さい。すみません全然わかりません。

お答え： どの問題のどこがわからないかを文章にして下さい。そういう努力をするうちにわかってくることもあります。

質問： 解答をもらうための手続きがよくわからないのですが、この質問用紙に書くことでもらえることは分かりました。それでは「問題の解答を次の週に配布してください」というお願いはきいていただけるのでしょうか？僕の勉強スタイルは 1 週間で問題にケリをつけてその後復習をする時間に当てています。定期的に解答をもらえるシステムだととても助かるのでご一考をお願いします。

お答え： 前半：質問用紙に「問題?-? をこのように考えたがここから先がわからない」「問題?-? の解答をこのように作ったが大丈夫か」と書いていただければ、ここで回答いたします。後半：講義資料 1 の Q and A に解答を配布しない理由が書いてあります。ご一考をお願いします、というのはその理由に対抗しうる大きな理由があるか、または山田が挙げた理由がおかしい、という論をあげてからだと思います。ご意見ください。議論しましょう。

その他

質問： 質問はとくにありません。誤りは 2 つありました。1 つ目は漢字のまちがい、2 つ目は有理数の定義が違っていました。

お答え： これでは間違いを指摘したことになっていません。具体的にどこが間違っているかを指摘していただかないと、訂正もだせませんし、授業の改善にも利用できません。ご協力お願いいたします。

質問： まだ最初の授業だったので特になし。 お答え： いろいろとある人もいるようですね。

質問： 次からします!! お答え： してね（何を？）

質問： 自分の授業が放送されるというのは緊張しますか？ お答え： もちろん。気が小さいですから。

質問： これからよろしくお願いします! 置いていかれないように頑張ります。

質問： これからよろしくお願いします（山田注：欄外に書いてあった）

質問： 多変数関数の基本だったのでまだ大丈夫だった。これから難しくなっていくと思うので頑張りたい。

お答え： この 3 件のような内容は下の欄に書いてくださるとよいと思います。