2013 年 4 月 23 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 3

お知らせ

- 来週 4 月 30 日（火）は金曜日の時間割で授業が行われます．したがってこの授業はありません．今回，講義資料 4 と 5 を配布いたしましたが，原則として資料 4 の内容は自習していただく，ということにしたいと思います．本質的に高等学校の延長です．5 月 7 日の講義は講義資料 5 の内容を扱う予定です．
- 1 枚の質問用紙に複数の質問・訂正をいただく場合がありますが，この場合は「もっとも悪いもの」の評価を得点とさせていただきます．ご了承ください．

前回までの訂正

- 関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ の導関数を $f'(x) = 4x^2 - 4x$ と板書したようです．もちろん $f'(x) = 4x^3 - 4x$ です．何人もの方からご指摘をいただきましたが，指摘になっていないものも見受けられました．講義の文脈がきれてしまった時点で "x^3 とかくところを x^2 とかいていた" とか "一変数関数の次数が $\boxed{\times\ 2 \bigcirc 3}$ でした" では何を言っているかが伝わりません．コミュニケーション力をつけるのもこの用紙の目的です．
- "変態な 2 変数関数の例" の板書で $((x, y) = (0, 0)$ など右括弧が足りないものがありました．また，場合分けの両方が $(x, y) \neq (0, 0)$ というものがありました．一方は $(x, y) = (0, 0)$ ですね．
- 板書における符号の誤り：

$$\left\{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right\}_x = y\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + xy\frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right\}_x = y\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)}$$

- 理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ の例で $P = nRT/V$ として "P を V で微分すると" とと言ったのは「"偏微分" では」というご指摘がありました．ごもっともですが，意味が明確なときは単に「V で微分する」と言います．
- 第 2 回の講義ノートの参照（例 2.1，式 (2.3) など）の最初の数字（節の番号）が 1 になっていました．例 1.1 は例 2.1 のこと，と読んで下さい．TEX の相互参照がうまくいっていなかったようです．
- 講義ノート 12 ページ 9 行目：関数 f $(f(x, y))$ ⇒ 関数 f (関数 $f(x, y)$ ということがある)
- 講義ノート 14 ページ 5 行目：$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- 講義資料 2, 2 ページ，下から 4 行目：d えてきてい ⇒ でてきて
- "約分" できる例は $16/64 = 1/4$, $19/95 = 1/5$ だけ，に $26/65$, $49/98$ も該当するというご指摘をいただきました．おっしゃる通りです．最後の例は「別のルールでもう一度約分」というちょっと苦しい例ですね．
- $x^2 \sin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x$ の導関数は $2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ ではないか（第 2 項に x^2 が抜けていないか）というご指摘がありましたが，$2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ で正しいのです．合成関数の微分公式を忘れましたか?

授業に関する御意見

- 建物の土足禁止は解除されたのになぜ土足禁止の看板が立っているのですか？下足箱と違って看板は比較的簡単に撤去するか，貼り紙などで無効にできるはずだと思います． **山田のコメント：** だそうです>担当の方
- 先生が上を向いて話すことが多いので，マイクが音をあまり拾っていないときがある．マイクを首のあたりにつけてはどうでしょうか． **山田のコメント：** ということです．対応できますか>担当の方
- やはり声量が小さかったです/ 途中マイクに音が入っていない部分があったので，次回から気をつけていただけると嬉しいです． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- ピンマイクいいですね ☆〜（ゝ。∂） **山田のコメント：** そう？やはり聞こえにくいのでは?
- 暑いです/快適な温度になりました! 逆に今度は寒かったです（僕がカゼをひいていただけかもしれないですが） **山田のコメント：** いろいろな人がいますね．どうしましょうか．

- 無線の音は気にならなくなった．ありがとうございます． **山田のコメント：** Thanks >担当の方
- 眠くなったらガム噛んで頑張ってます．ガムが禁止なら別の手段を考えます． **山田のコメント：** 大丈夫だそうです．
- 教科書が第一刷だったんですが，取り替えていただくことは可能ですか？
  山田のコメント： 難しいと思います．とりあえず正誤表を見て下さい．取り替えられませんよね>著者の方
- 黒板の下の端らへんに文字を書くと後ろから見にくいのであまり書かないようにお願いします． **山田のコメント：** はい
- d は (山田注：丸いところを反時計回り) と書くので，∂ も (山田注：丸いところを反時計回り) と書くべきのように感じました．
  山田のコメント： どちらで書く人もいるんですが，どうなんでしょうね．
- ∂ が書きにくいです．z を「ゼット」でなく「ズィー」と読むのは何故ですか？ **山田のコメント：** 慣れて下さい/米国流 (?)
- 黒板の右上のナンバリングが良かった． **山田のコメント：** 3 年前にこの欄でいただいたご提案です．
- 分かりやすい! **山田のコメント：** そうかなぁ．いずれにせよ「分かりやすい」と思われる授業は危ない．あとで「ちっともわかってなかった」ことに気がつく可能性大．山田はなるべく「わかりにくい」授業をめざすようにしています．
- とても楽しい授業でした．わかりやすく面白く眠気を感じませんでした． **山田のコメント：** 眠い人もいるようです．
- やっぱり眠いです．内容は面白かったです． **山田のコメント：** そうですか．眠気を飛ばすほど面白くはなかったと `orz`
- なんかちょっと眠かったです/ 授業がつまらないわけではないが，ものすごく眠くなります． **山田のコメント：** me, too
- ふつうにおもしろい **山田のコメント：** 異常に，ではないということね．そうですよね．
- いよいよ新しい単元に入ったというかんじ．楽しいぞ〜 **山田のコメント：** 第 3 回はちょっと辛気臭い話．
- 先週の授業はよくわかりませんでしたが，今回の授業はわかりやすかったです．
  山田のコメント： そりゃそうでしょう．感覚は「高校数学」ですから
- ちょくちょく雑談をいれてください．そうでないと寝てしまいます． **山田のコメント：** そんなにネタはありません．
- 次回が本当に楽しみです． **山田のコメント：** 期待が大きいとはずれも大きいのであまり期待しないでください．
- $\frac{\sin x}{n} = 6$ が個人的に感動しました．変態な関数が難しかったです．
  山田のコメント： 前半：感動しなくていいです．後半：簡単な関数は変態になれません．
- 「約分」できる分数を探すプログラムを書いて見ました．`http://ideone.com/JDRsSo`
  山田のコメント： 4 通りね．うち一つは「別のルールでもう一度約分できる」というちょっと苦しい例か？
- 変態な関数と健全な関数とどっちが好きですか． **山田のコメント：** 好き嫌いの問題ですか？
- 先生は変態好きの変熊（原文ママ）.（変態なことを語っているとき，とてもうれしそうです）微分って何かすごいですね．
  山田のコメント： 変態な例ってなんか面白いでしょ．微分が「すごい」ってのがどういう感覚だかよくわかりませんが．
- 質問内容をいざ言葉にしようとするとなかなかうまくいきません．拙筆をお許しください．講義に関しては，今のところ楽しく聞かせていただいています． **山田のコメント：** 前半：その練習をしてもらうのがこの用紙の目的の一つ．後半：どうも．
- いくら他の言語経由だからといってイングランドがイギリスと呼ばれるような国の発音です．Vektor をベクトルと読みたくもなりますし． **山田のコメント：** イギリスは Inglesa (スペイン語) では? “or” はオルですか? （いつの時代のドイツ語?)
- Vector ベクトルの件ですが，化学の世界では化合物の物質名称をその発音如何にかかわらず R も L もラリルレロ，B も V もバビブベボに変換させるルールがあります．このルールによれば Vector はベクトルです．このルールに依ったものかどうかは不明です． **山田のコメント：** 単純にこのルールによるなら「ベクタ」だと思いますが.「オル」の部分はどう解釈します？
- 「接線が引けるけど傾きが拡散（原文ママ：発散のことか?）している」の一言が $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $x = 0$ での微分可能性についての説明としてとても分かりやすかったです． **山田のコメント：** 一般に微分可能でない理由はこれだけではないですよね．
- みんながどの程度理解できているのか分からないので不安です．
  山田のコメント： me, too. いずれにせよ，回りがどうあろうと自分がちゃんと理解できなければ何も始まらない．
- 単純に計算するだけの問題では自分の計算力がおとろえていないかを確認したくて答えが欲しい場合もやはり〜がわからなくて〜と一報しないといけないのでしょうか？正直答えが分かっていないわkではなく何日も計算に対する答えを末のはフラストレーションがたまります．
  山田のコメント： アホな教師から自立する 2 つの方法を提案します：(1) 5 人くらいの級友と一緒に計算し答を合わせる．あわなかったら議論する．だれが間違ったかはすぐにわかるのでは? (2) 単純な答合わせなら，数式処理ソフトウェアを使うのもよい．手計算は感覚を養うのに非常に重要ですが，機械もかなり有能．高価な市販品でなくてもフリーな OSS でも十分実用的です．いずれにせよ「自分が出した答えを自分で確認する」ことができなければ知的自立はできません．
- 先生は朝強い方ですか． **山田のコメント：** いいえ．いつでも強くないです．喧嘩したら負けます．
- 一回目授業の質問用紙を提出しそびれました．すみません．教科書はまだ買っていません． **山田のコメント：** 出して/買って
- 今回は時間内に出したので厳正な審査をお願いします． **山田のコメント：** もともとそんなに厳正にはやっていません．
- 今回（前回？）頂いた『微分積分学第一講義資料』を拝見しました．『自分では気づかなかったが改めて考えてみると疑問な点を考えてみる機会になったり『t 次元（但し $t \notin \mathbb{N}$)』のようにまだ見ぬ数学のセカイを垣間見ることができたりと，非常に有意義なものであったと同時に講義のプリントの問題を解き分からないところや調べるべき所（第 2 回では極小曲線（原文ママ：極小曲面のことか）など）を調べてそれを踏まえて質問用紙に書くという一連の流れがこれからの授業内容が難しくなるにつれて 1 日じゃ厳しくなるのではないかと思います．全員の質問用紙を読んで，まとめてプリントにする作業もとても大変なものに加え，万が一できればで構いませんが，質問用紙の提出期限を木曜 9 時くらいまで伸ばして下さると助かります．
  山田のコメント： 1 週間のうちだいたい毎日会議がはいっていて，この用紙に時間をかけられるのは水曜日の午後と木曜日の午前中だけなので難しいです．質問内容は今回**まで**の授業に関するものとします．
- 特になし **山田のコメント：** me, too

質問と回答

質問： 10 ページ 17 行目：「0 で」は 「$x=0$ で」ということですか．それと $x \neq 0$ では $\alpha \leqq 1$ でも微分可能ですか．

お答え： 前半：「$x=0$ で」ということもあります．講義ノートでは "f が a で微分可能" という語を定義しているので，その用法に合わせると「0 で微分可能」となります．後半：そうです．微分公式があるので．

質問： 「グラフがなめらかな曲線ならば微分可能である」とはいえないということでしたが，「微分可能ならばグラフはなめらかな曲線である」といえるのですか．

お答え： 「なめらかな曲線」の定義にもよります．"平面図形 C を，C 上の点 P の十分近くで切り取れば，その図形は微分可能な関数のグラフと**合同**になる" 程度の定義でよいだろうか．とすると当たり前ですね．

質問： $f(x)=\sqrt[3]{x}$ のグラフについて，$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$ となり定義できず，いわゆる今までの「傾き」としては求められませんでした（原文ママ：求められるの主語は何?）．ですが $x=0$ という接線が存在しました．このような xy 平面で $y=f(x)$ のグラフで y 軸に平行な接線は厳密にはどう求めればいいですか．それとも微分係数が $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a}{h}$ (a は定数)（原文ママ：$a\neq 0$ でないといけませんね）のようになるときは，接線は y 軸に平行と判断して大丈夫ですか．

お答え： 1 次変換 $T:(x,y)\mapsto (Y,X)$ によって曲線 $y=\sqrt[3]{x}$ は曲線 $Y=X^3$ に移る．XY 平面の曲線 $Y=X^3$ の原点における接線は X 軸だから，それを T^{-1} で写した直線，すなわち y 軸がもとの曲線の接線になっている．

質問： 問題 2-2 と同じ関数について，板書では $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ となっていましたが，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{2h0}{h^2+0}-0}{h}=\frac{0}{0}$ (不定形) とはならないのですか?

お答え： いいえ．高等学校で学んだ "定数関数の導関数は 0" の証明と同じ．極限をとるまえに "できるかぎり式を簡単に" しておく必要があります．最後の等号の部分は $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$ とすべきです．

質問： 不連続なのに偏微分可能とは図形的にどのようなものですか． **お答え：** 例 $(2xy/(x^2+y^2))$ の等高線を見よ．

質問： 微分というのは直感的に意味や有用性が分かりやすくグラフ上でもかたむきとして表れます（原文ママ：現れますのことか）が，偏微分の直感的な理解，有用性というものはありますか．（片方を止めて微分というのは直感的でわかりやすいですが，連続的でないのに偏微分できるとなると分かりにくくなります）

お答え： "連続的でないのに偏微分できる" 例は変態なので，それらを含まない範囲の関数を考えます（今回）．なお，「直感的な説明」や「意味」は何通りもあります．掛け算九九と一緒です．

質問： 微分係数が関数 f の接線の傾きを表しているように，偏微分係数も関数のグラフの何かを表すのでしょうか．

お答え： 表します．一部，第 5 節でのべます．

質問： 1 変数関数の場合「微分する」といえば，操作は特定できますが，多変数関数の場合「x で偏微分する」でなく「微分する」という操作はあるのでしょか． **お答え：** とりあえず第 5 節で．

質問： 従来行なってきた 1 変数関数の微分はグラフの概形ないし関数のとる値の変化を知るために有効な手段でした．一方，今回の偏微分という概念においてはそのような有効性がいまいち把握できません（そもそもある変数以外を定数とみなすという行為が大胆すぎて受け入れにくいです）．この偏微分とその導関数（原文ママ：偏導関数のことか）は関数の解析にどのように寄与するのでしょうか．

お答え： それを学ぶのがこの科目ですので，最後まで勉強してください．たかが「偏微分」くらいで大胆と思うほど頭が硬いとすれば，それはどうにかしなければなりません．

質問： 偏導関数も 1 変数関数における 1 次導関数が傾きを表すように何かを表したりしますか? **お答え：** 何の傾き?

質問： 2 変数関数において，偏微分をするとグラフ的にはどのような意味を持ちますか?

お答え： 日本語が変．「グラフ的には」とはどういう意味でしょう．質問を推測すると，第 5 節．

質問： 偏微分はどのような時使うのですか/偏微分する意味は何ですか?

お答え： 「掛け算九九はどのような時使うのですか」と同じ問い．使い道はたくさんある．

質問： 偏微分の物理における具体的応用例をおしえてください． **お答え：** 「熱方程式」他，ラプラスの悪魔に聞こう

質問： 今回の授業では偏微分という式の操作を学びましたが，これは我々の文明においてどのような場面に使用されているのですか．具体的な例を教えてもらえるとありがたいです．

お答え： 講義でやった「熱方程式」の例では不満ですか？この質問は，皆さん理工系の大学生にとって，「掛け算九九はわれわれの文明においてどのような場面に使用されているのですか」という質問と同じです．すなわち愚問．

質問： 偏微分というのは多変数関数において，全ての変数に対する各々の微分ということで良いのでしょうか．それとも全ての変数に対する全体の微分ということでしょうか．

お答え： おっしゃっていることが分かりません．何を言おうとしているか，具体例で書いてご覧なさい．

質問： 普通は f_{xy} と f_{yx} が一致するということですが，大学の数学という時点でもはや普通ではないですよね．

お答え： 皆さんにとっては「掛け算九九」と同じくらい普通です．普通に思えなければいけません．

質問： 2 変数 x, y による関数 $f(x,y)$ を x で偏微分して，さらに y で偏微分したものと，x，y で微分したものはやってることは同じ (?) なのに目的が違うだけで結果が異なることに不思議な気持ちになった．

お答え： 気持ちはどうでもいいんですが．「やってることは同じ」なんですか？「目的」って何ですか？

質問：「偏微分の順序交換定理」では，どのような偏導関数どうしが一致しているのですか？ x で偏微分した回数と y で偏微分した回数が同じ偏導関数どうしが一致するのですか． **お答え：** そうです．

質問： p13 7 行目に $f_{xy} = f_{yx}$ でない「病的」な例とありますがそれでは $f_{xy} = f_{yx}$ は $pV = nRT$ のように公式として頭に入れておいて「ほぼ」問題無いのでしょうか． **お答え：** そうです．頭に入れておいて下さい．

質問： (1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ のときは $f(x,y)$ をまず y で偏微分して，そのあとに x で偏微分するという事でいいですか？ (2) 偏微分で 2 変数以上を扱うとき，微分する順というのは重要ですか？ (3) もし偏微分の微分する順番が重要な関数があったとして，$f(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ となることはありえますか？ ($\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \neq \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial x}$)

お答え： (1) はい．(2) 普通は重要でない．(3) の意味がわかりません．最初の式と括弧内の式は意味が違いますね．たとえば $f(x,y) = e^{x+y}$ は最初の式を満足しますが括弧内の式は満足しません．

質問： 調和関数とはどういった性質をもつのですか． **お答え：** 2 変数関数なら $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

質問： 関数 f が調和関数のときに $\Delta f = 0$ 以外に特徴がありますか？ (たとえばグラフに特徴があるなど).

お答え：「調和関数の平均値の定理」（高等学校で習ったのとは別物）が数学的には重要です．他にもたくさん．

質問： 講義ノートの問題に出てくる調和関数はどれも対称式ですが，対称式でない調和関数というものも存在するのでしょうか． **お答え：** 1 次式は調和関数．$f(x,y) = x^2 - y^2$ も調和関数．

質問： $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ や $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ のように文字について対称式となっている関数は調和関数となることが多いですか？ **お答え：** いいえ．$x^2 + y^2$ は調和関数ではない．

質問： 熱方程式について，講義ノートには $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$（原文ママ）と書いてありますが，板書には $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ とあったと思います．このときの k に制限はありますか？

お答え： 式が違っています．これは波動方程式．で，k は正の定数です．これは（授業で説明した状況では）針金の性質に依存する定数で，温度や時間の単位を変更すれば 1 にしてよいものです．

質問： $\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ がなぜ熱方程式といわれるのか説明していただきたいです． **お答え：** 講義の説明では不満？

質問： $\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ を熱方程式というので，熱の伝導はこの方程式が成り立つように伝わるのでしょうか？

お答え： それを講義で説明した．「熱の伝導が伝わる」は「白い白馬に飛び乗る」感じがしますね．「熱が伝わる」です．

質問： 熱方程式は「ある導体の熱の出入りが総熱量の時間変化に等しい」ということを利用して導かれるらしいのですが，なぜ偏微分の “$f_{xy} = f_{yx}$” の一例として挙げることができるのでしょうか．

お答え： “$f_{xy} = f_{yx}$” の一例であるとは一言も言っていませんし，どこにも書いていません．

質問： 2-4 の波動方程式の $\sin(t+x)$ と $\sin(t-x)$ の部分は物理の波を表していると思うのですが，この 2 つをたしているということはかさねあわせの原理を示しているのですか？ **お答え：** そうです．数学的には「線形性」.

質問： $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと $f(r,\theta) = \begin{cases} \sin 2\theta & (r \neq 0) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$，一方，$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ は同様に $g(r,\theta) = \begin{cases} \cos 2\theta & (r \neq 0) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$ なので g と f のグラフは合同になるが，連続性や微分可能性等の性質は同様と考えてよいですか？ ($y = x^3$ と $y = \sqrt[3]{x}$ のグラフは合同でも微分可能性に違いがあることを今日学びました)

お答え： 括弧の中の例と最初の例に少し違いがあります．最初の例は，定義域 (xy 平面) の合同変換で写り合うもの，括弧内の例は定義域と値域を合わせた xy 平面の合同変換で写り合うものです．前者に対応するのは，1 変数関数で考えるなら $f(x)$ に対する $f(\pm x - a)$ でしょう．この場合，微分可能性や連続性は保存されます．ご質問の例ですが，この場合，原点で f も g も不連続で，(A) f は偏微分可能 (B) g は偏微分可能でない，となります（等高線を描いてみよ）．このことから「偏微分可能」というのはあまり良い概念ではないわけです．第 3 節で扱います．

質問： （1 変数関数ならば，微分可能 $\Rightarrow$ 連続）多変数関数ならば，“偏” 微分可能 $\not\Rightarrow$ 連続，もしくは $f_{xy} = f_{yx}$ となるようなケースは一般化できますか?

お答え： どういう一般化を期待していますか? 一般化というのは「対象をより広い範囲にしても類似の性質が成り立つ」という性質で，もとの（対象を広げる前の）性質を含むものです．どのような対象に一般化したいですか?

質問： 2 変数関数以外の多変数関数も同じように偏微分することはできますか． **お答え：**はい．

質問： dx が分数として扱えて ∂x が分数として扱えないのはなぜですか?

お答え： むしろ dx が分数として扱えるというのが不思議だと思いますがいかがでしょう．

質問： 3 変数，4 変数の場合も “∂” を使いますか? もしそうなら，1 変数のときだけ特別に “d” を使わなければならないのは何故ですか． **お答え：**を授業で説明した．dy/dx は分数のように扱えるが偏微分記号はそうでない．

質問： ∂ (山田注：上から時計回りに書く) が正しいみたいです．ギリシャ文字は時計回りが基本みたいです．対してアルファベットは反時計回りです． **お答え：**これはギリシア文字なんですか?

質問： 先生の説明では ∂ は d から派生したものであるかのように聞こえましたが，wikipedia にはギリシャ語の δ から派生したもので「デル」とも読むと書いてありました．結局 ∂ と d は無関係なのですか？

お答え： ギリシア文字の δ はローマ文字の d に対応します．このようにギリシア文字のほとんどはローマ文字の対応物を持ちます．したがって “δ” から出てきたという説をみとめても “d” と無関係というわけではありません．「デル」という読み方をする人はいますね．山田も時々使います．

質問： $\partial \leftarrow$ この字は何語ですか? それとも数学のみの記号ですか? **お答え：**多分後者．

質問： ∂ (ラウンド・ディー) をあわてて書くと θ (シータ) になりそうです．∂ と認識させやすくするコツはありますか． **お答え：**何回も書いて見よ．

質問： ∂ が決まった読み方がないとのことですが数学の記号は読み方が決まっているものと決まっていないもののどちらが多いのでしょうか． **お答え：**決まっている，の中にどれくらいの曖昧さを許すかにもよりますね．

質問： ∂ について (山田注：どちら周りに書いてもよい) とのことでしたが，書き方が違うと自然に字の形は変わるものです．x (山田注：ふたつの書き方) についてどちらでも良いとのことで，数学においてこのような細かな表記の違いで誤解が生まれるようなことはないのですか． **お答え：**このケースではないと思いますが，文脈に依存します．

質問： $\left\{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right\}_x$ というのは $\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ について x で微分するという記号であっていますか．このような記号はこれから普通に使用するのでしょうか．

お答え： あっていますが，日本語が変．“... について x で微分する” ではなく “... を x に関して微分する”．山田が不勉強なのかもしれませんが “ついて” に目的語を表す用法ってありましたっけ．後半：普通．

質問： 黒板には ∂ を丸いディーと書いてありましたが，先生なりの言い方ですか？

お答え： こういうふうに言うひともいます．英語では “round dee” という言い方は結構普通です．

質問： ∂, Δ は名前が長いですが略称等はありますか? **お答え：**偏微分記号，ラプラシアン．

質問： f を x で 2 階微分した f_{xx} というのは f_{x^2} とは書くことはないのですか． **お答え：**あまりないようです．

質問： $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ のどれでもよいのですか． **お答え：**よいです．

質問： $f(x)$ の n 次導関数は $f^{(n)}(x)$ とかけるので，高次の導関数もかきやすいのですが，偏導関数の場合は 高次のときでもかきやすいかき方はないのでしょうか?

お答え： どの変数で何回微分するかを明示しければならないので複雑です．n 変数関数の高次偏導関数を表すのに “多重指数” を用いる方法もあるのですが，技巧的ですし，この講義の範囲では不要だと思いうので説明はしません．

質問： x, y の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，基本的に $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial y}$ ですか．

お答え： 質問がナンセンス．x と y は独立に動かせる変数であって x は y の関数ではないので $\frac{\partial x}{\partial y}$ は意味がない．

質問： 2 変数関数では d を使えませんが，1 変数関数では ∂ を使うこともアウトでしょうか．

質問： y を x の関数としたとき $\frac{dy}{dx}$ を $\frac{\partial y}{\partial x}$ としても良いのですか?

お答え： 微妙です．論理的にはアウトでないかもしれませんが，“これが一変数関数だと気づいていない” というふうに思われて馬鹿にされる可能性があります．

質問： f_x や f_y は何と読めばよいのですか? **お答え：**“f sub x”, “f sub y” とよむと英語国民にはたぶん通じる．日本語だったら “f 下付き x” だが “f の x に関する偏導関数” と読んだ方がよいと思う．

質問： 偏微分の略式はよく使いますか? **お答え：**「偏微分の略式」とは何のことをいっているのですか?

質問： 偏導関数全てとは，例 2.3 のやのように出せばよいのか（原文ママ）． **お答え：**読み取れません．

質問： $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{df}{dx}$ の違いを $pV = nRT$ を用いて説明されていました．私としては $f(x,y)$ のときに $\frac{\partial f}{\partial x}$ は y が定数で

$\frac{df}{dx}$ は y を x の関数として扱わなければならない違いではないかと思っていましたが，先の説明を受けてこの理解では足りなかったり間違っていたりしている所があるのかと思います．ご指摘願います．

お答え： “$f(x,y)$ のときに” が何を表しているか曖昧ですが，“f が (x,y) の関数のとき” と読むのでしたら，x, y は勝手に動きます．この文脈で y を x の関数としてはいけません．そのようにする状況を第 5 節で扱います．

質問： あと内容の指的（原文ママ：指摘のことか）ではないが $pV = nRT$ の例を黒板に書いたとき，e. g. $pV = nRT$ と書いてあったが，e. g. とは exsample（原文ママ：example のことか）の ex と間違えたのではないか．または字が汚くて私が見間違えたか. . . **お答え：**辞書を引こう．exempli gratia の略．

質問： V と V (山田注：後者は右上に短い横線が入る）の使い分けはありますか． **お答え：**山田は使い分けません．

質問： 「$f'(x)$」の「$'$」は「プライム」なのですか? 「ダッシュ」とは違うものですか?

お答え： まず，英文法的には，記号 “$'$” は prime と読みます．一方，dash とよばれる記号は “—” です．“$f'(x)$” の点ががいつどこで dash と読まれるようになったのか浅学ゆえよくわかりませんが，英米人でもたまに使う人がいます．（たいていは prime と読んでいるようですが.）経緯をご存知の方，教えて下さい．

質問： 「偏微分方程式」という言葉がでてきましたが，具体的にはどういうものなのでしょうか．偏微分している式の入っている方程式という認識でいいのでしょうか? **お答え：**例は講義で挙げた「熱方程式」．第 6 節で少し扱う．

質問： 2 変数関数のグラフを書く際，xyz 平面（原文ママ：座標空間のことか）での図示が複雑な場合等高線や xy, yz, zx 平面などの切り口のみを書くだけでいいんでしょうか?

お答え： 数学を使う立場なら「使えるものは何でも使え」．ガキへの説教はしません．あなたが「こう書くことで関数の挙動が理解できた」と思えるまであらゆるデータを調べるべき．

質問： 問題 2-3 について $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-x^2}4t + \frac{1}{4t^2\sqrt{t}}e^{-x^2}4t$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{4t^2\sqrt{t}}e^{-x^2}4t + \frac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-x^2}4t$ となってしまい計算があわなくなってしまうのですが，正答を教えてください．

お答え： たぶん $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-x^2}4t + \frac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-x^2}4t$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2t^2\sqrt{t}}e^{-x^2}4t + \frac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-x^2}4t$. 微分公式 $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$ が正しく運用できなかっただけと思います．

質問： 先生の授業がわかりやすいので質問がない場合は何点になりますか？ **お答え：**0 点．ここにあがっている質問内容をすべて理解していましたか？そうでないなら「疑問点に気づかない」だけでは?

質問： 偏微分で片方の変数を定数としてみて微分することに違和感があるのですが大丈夫なのでしょうか．

お答え： 「大丈夫」かは目的によります．「～をするためには大丈夫でしょうか」でなければお答えできないと思います．

質問： 偏微分があるとしたら偏積分もあるのでしょうか．また偏積分というものがないのならば，多変数関数での積分にはどのようなものがあるのでしょうか． **お答え：**シラバス・授業日程表には「重積分」という語がありますね．

質問： $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ におけるグラフの様子が分かりません．

お答え： グラフの様子とは何のことを指すのでしょうか．まず，グラフはかけますよね（高等学校の範囲).

質問： 偏微分は多変数関数を計算するためであると考えてよいのですか．

お答え： 「多変数関数を計算する」という語が何をいっているのかわかりませんのでお答えできません．たとえば「微分は一変数関数を計算するためである」といっていいですか？

質問： 授業プリントの後の方の演習問題を解いて，答え合わせしてくださいと言っても断るんですか?

お答え： これであってますか，って聞いて下さい．

質問： 先生の「変態」の定義を教えて下さい． **お答え：**この講義では “微分可能だが導関数が連続でない” とか “偏微分の順序交換ができない” など，エキセントリックな性質をもつ関数のこと．あるいは “きれいな式でかけない” 関数のことをいうこともある．“エキセントリック” や “きれいな” という語が主観的なので，“変態” も主観的.

質問： 他にどんな変態な関数があるのですか． **お答え：**授業で折々に挙げていきます．

質問： 「変態な関数」を考えることに何の意味があるのですか． **お答え：**定義がカヴァーする範囲がどれくらいなのか，それは我々が想像しているものと一致しているのかいないのかを考える指標になる．

質問： 変態な関数は好きですか? **お答え：**好き嫌いの問題ではありません．

質問： この授業の質問用紙に全部目を通して回答を作るのに大体どれくらいの時間がかかっていますか? かなり大変だと思うのですが． **お答え：**4 時間以内．これ以上はかけられない．

質問： 授業のたびに講義資料をつくるのは大変ではありませんか? **お答え：**大変です．だから丁寧な字で. . .

質問： $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ のときの $f(x,y) = 1$ の等高線の説明がわからない．$y = x$ がこれを満たすのはわかるが，$y = mx$ と $2m/(1+m^2)$ というのが言わんとしていることがわからない．（図省略)

お答え： 直線 $y = mx$ は，高さ $2m/(1+m^2)$ の等高線.