

2013年5月7日(2013年5月14日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 微分積分学第一講義資料 4

### テキストの版について

「教科書が第一刷だったんですが、取り替えていただくことは可能ですか?」というご意見に対して、著者から返信が来ましたので、転記します:

少なくとも、購入したものに對する意見等は購入先の販売店へお願いします。著者は販売のものには関与してません。販売は販売店が行っているということを理解していただきたいと思います。ちなみに、著者も、献本をいただいてようやく凌いでいるという状況です。

### 前回の補足

- 講義ノート 21 ページの (\*) 式で、“誤差”の項を  $\varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$  という形にしましたが、講義ではこれ全体を  $\varepsilon(h, k)$  と書きました。したがって、黒板に書いた式と講義ノートの式の見え目が違っています。申し訳ありません。上記のように読み替えて下さい。

### 前回までの訂正

- 講義ノート 17 ページ 5 行目: 定理 3.2 → 定理 3.2 より
- 講義ノート 18 ページ下から 3 行目:  $r > 0, a < b, c < d \Rightarrow r > 0, a < b, c < d$
- 講義ノート 23 ページ 6 行目:  $f$  は  $I$  で  $C^0$ -級  $\Rightarrow f$  は  $D$  で  $C^0$ -級
- 講義ノート 23 ページ 12 行目: 2 次導関数  $\Rightarrow$  2 次偏導関数
- 講義資料 3, 1 ページ, 下から 9 行目: 会場  $\Rightarrow$  解除
- 講義資料 3, 2 ページ, 1 行目: ななく  $\Rightarrow$  なく
- 講義資料 3, 6 ページ, 21 行目:  $(e^{f(x)})' = f'(x)e^x \Rightarrow (e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$
- 黒板に “ $C^2$ -級” と書くべくところを “ $C^2$  級” と書いたそうです。ハイフンの有無によって意味が変わるわけではなく、どちらも正しいと思いますが、講義ノートなどではハイフンを入れていたので、それに統一するべきでした。
- 講義ノート 23 ページ, 下から 3 行目:

$$V = V(h, k) := \frac{f(a+h, b+k) + f(a, b) - f(a+h, b) - f(a, b+k)}{hk}$$
$$\Rightarrow V = V(h, k) := \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a, b)}{hk}$$

- 講義ノート 24 ページ, 上から 3 行目:  $f_x(a + \theta_1, b) \Rightarrow f_x(a + \theta_1 h, b)$
- 講義ノート 24 ページ, 上から 8 行目:  $G(t) := f(a+h, b+t) - f(a+h, b) \Rightarrow G(t) := f(a+h, b+t) - f(a, b+t)$
- テキスト 16 ページの真ん中へんの「例 1, 例 2」は「例 6, 例 7」の誤り, というご指摘をいただきましたが、これは著者のテキスト正誤表(講義概要参照)に挙げられているはずです。

### 授業に関する御意見

- ライトが強く、黒板に反射して文字が読みづらい(特に向かって右下の黒板)がありました。
- カメラは先生の顔じゃなくて黒板を写して欲しい。  
山田のコメント: 了解。担当の方に伝えます。
- 今日のクラスはすずしかった。この状態は続けたい。/ 教室が寒いです。今日は寒くなりました。もう少し教室を暖かくしてほしいです。/ 今日は寒かった。(部屋が)/ 空調が大変適当で良かったです。/ 最近あつかったりさむかったりめんどーです。  
山田のコメント: 皆さんひとりひとりにとって良い気温にするのは難しいのですが、なるべくなんとかしましょう。

- 黒板の文字が読みづらい(英語のスペル)/ うすい赤みたいなのは見えづらい。 山田のコメント: Sorry
- 先生の「義」の書き順が特殊ですね。 山田のコメント: そうですか。確かに自信がないので調べてみます。
- 今まで、この質問用紙を提出できていなかったのが、最初の授業で先生がおっしゃっていた受講者リストに入れておいてください。よろしくをお願いします。 山田のコメント: はい。
- 講義資料3のおしらせで質問の「もっとも悪いもの」の評価を得点とする、とありますが、なぜですか? 得点のことを気にして質問しづらくなりました。もしふざけたことを質問する人がいるならその人の得点を減らせばよいのではないですか?  
山田のコメント: ふざけた質問が問題なのではなく、あまり深く考えたものではないと思われる質問を大量にされると、処理が面倒になるからです。1つにしてください、とお願いしても聞き入れてくれない方が、(過去に)多かったのが、もうすこし実効性のあることを書いてみたのです。
- ここに先生への文句を書くには欄がせますぎる。(でも欄が増えでもう伝わらなさ過ぎて書く熱意すら失せている)  
山田のコメント: 長々と書くのと伝わるのでしょうか。だいたい伝わっていますよ。その文句が私の考えや構想と違う、ということはもちろんあって、反論する、というのもありますよね。
- 先生は授業中、放送されているにも関わらず、普通に話せるなんてすごいです。 山田のコメント: 単に鈍いだけです。
- 資料のアップデートが早くて良い。 山田のコメント: 努力を続けます。
- 論理だけだと眠くなります。なんか例題の解き方を入れたいかがですか? 山田のコメント: その日のテーマにもよります。
- 授業は楽しいのですが、どうも前半は眠かったです。後半は元気でした。  
山田のコメント: ごめんなさい。教室のキャバの問題かもしれません。
- 先生が楽しそうで... 楽しくなさそうに授業しているよりはいいと思います。  
山田のコメント: 楽しいフリっていうのもつかれます。
- まあ、いいんじゃないかな 山田のコメント: そうかもね。
- この講義(原文ママ)はいつもより短い気がしました。 山田のコメント: 時間いっぱいでしたがね。
- 隣の人が「← バナナ」(原文ママ)とノートに記述していました。真面目にやってください。  
山田のコメント: まじめに「バナナ」と写すべきということでしょうか。一応、真面目なつもりですが。
- パ w ラ w ナ w ラ w パ ww ワロタ www 山田のコメント: まあまあおちついて
- 「バナナ」には衝撃を受けました。 山田のコメント: そう?
- $\frac{\sin x}{x} = 6$  が一週間かかってようやく分かりました。頭がカッチカチのようです。  
山田のコメント: まあ、わかんなくてもよいんですが。
- 授業の最後にこの用紙の返却を行っていますが、教室の出口が混雑していつまでもかえれません... 回答も別紙にまとめられているし、返却する意図がわかりません。  
山田のコメント: 手元におくと処分に困るので返却しています。学籍番号順になっているので、だれかうまいことを考えて効率を上げてくれると嬉しい。
- すみません、疑問点等見つけることができませんでした。次回以降より集中してきいて頑張ります。  
山田のコメント: 見つけよう、あるいは揚げ足をとろう、として聞くといろいろなことがわかります。わかるはずですよ。
- 毎回全部の質問用紙に目を通していらっしゃるんですね。お疲れ様です。 山田のコメント: おつかれます。
- 教授は忙しい身でありながらわざわざ時間をかけてこのような形で最大限の学生とのコミュニケーションを図っていただけなのは何故ですか。 山田のコメント: おもしろいからです。
- 変態な函数はどのように見つけるのですか? 見つけた人のほうが変態の気がします。 山田のコメント: そうかもね(変態は褒め言葉ですよ)
- 特になし 山田のコメント: me, too

## 質問と回答

### 微分可能性

質問:  $f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$ ,  $\varepsilon(h, k)$  は  $f$  にいぞんするののか。

お答え: 依存します。

質問: 今回の授業で偏微分可能で連続でないものがありました。連続で偏微分不可な関数もありますか。

お答え: はい。典型的な例は  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

質問: 区間  $I$  で定義された1変数関数  $f$  に対して、 $f$  が  $I$  で微分可能で、導関数  $f'$  が  $I$  で連続でない場合、 $f$  の呼び方はありますか。

お答え: 特別な呼び方はないと思います。「微分可能だが  $C^1$ -級でない」というのが普通です。

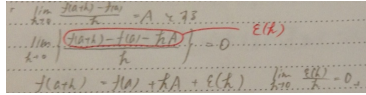
質問: 例えば  $x, y$  の2変数関数  $f$  について、 $f$  は  $x$  について偏微分可能だけど  $y$  について偏微分可能でない場合はないのですか? お答え:  $f(x, y) = x + |y|$  とすれば  $(x, 0)$  において  $y$  について偏微分可能ではないが、 $f_x = 1$ 。

質問:  $f(a+h, b+k)$  を微分するときの割り算は  $\sqrt{h^2 + k^2}$  ならよさそうでは?

お答え: 実はそれだけでは情報が少な過ぎます。今回の講義で少しあつかいます。

質問:  $\varepsilon$  についてはっきりと分らなかったのですが, 極限の形で表れなかった  $\varepsilon(h)$  が等式の形で表れる (原文ママ) 理由をもう少し説明して欲しいです.

お答え: 表れるというより  $\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$  とおいた, と思って下さい.

質問: 1変数関数についての Review の後の板書で  と書いてあったが, この部分  
 が何を示しているのかわからないので教えてください.

お答え: をつけたところを  $\varepsilon(h)$  と置くと, 下の式のようにかける.

質問: 平均値の定理について, 高校では「関数  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続かつ开区間  $(a, b)$  で微分可能ならば  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$  ( $a < c < b$ ) を満たす  $c$  が存在する」と習いましたが, プリントでは点  $a$  と  $a+h$  は微分可能とされていました. 点  $a, a+h$  は連続だけでは不十分なのですか.

お答え: 不十分ではありません. ご質問の定理は今回授業でのべた定理を含むより強い版です. ご質問の形の定理も必要となる場合がありますが, 今回は講義ノートの形で十分です.

質問:  $D \subset \mathbb{R}^n$  で定義されたかんすう  $f(x_1, \dots, x_n)$  が  $(a_1, \dots, a_n) \in D$  で微分可能であるとは, うまく定数  $A_1, A_2, \dots, A_n$  を選び  $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \in D$  に対して

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \varepsilon(h_1, \dots, h_n) \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$$

でいいですか?

お答え: まだ続きます. “と  $\varepsilon(h_1, \dots, h_n)$  を定めると,  $\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(h_1, \dots, h_n) = 0$  が成り立つ”.

質問:  $f(a, b)$  が微分可能  $\Leftrightarrow f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \varepsilon(h, k)$  と板書にありましたが, なぜ  $Ah + Bk$  と行列の積が出てきたのでしょうか.

お答え: まず  $\Leftrightarrow$  の右側はこれだけでは完結していない, ということは大丈夫ですね. ここでは  $A, B$  はスカラーとしています. 講義ノートの定義 3.10 をごらん下さい.

### 極限と連続性

質問:  $\frac{2xy}{x^2+y^2}$  が連続であるかどうかを調べるには  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とおいてやればいいのでしょうか.

お答え: 「やれば」の部分でうまくやればよいです.

質問:  $\frac{2xy}{x^2+y^2}$  の  $(x, y)$  を  $(0, 0)$  に近づける時, その近づけ方によって値が変わるのはなぜですか.

お答え: 実際に計算してみればそのようになる (という答えを期待している?)

質問:  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$  など  $(x, y) = (0, 0)$  で分母が 0 になってしまう関数が  $(0, 0)$  で連続かどうかすぐにはどうすればいいのでしょうか. また, 連続かどうかを示すときに  $x, y$  をどうおきかえるかわかりません. ( $(x, y) = (t, t), (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  など)

お答え: いつでも使える技があるわけではありません. 関数の定義式をよく眺めていじってやる必要があります. 極座標でおくのが有効な例が教科書などでは多いですね.

質問: 講義で出てきた  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$  のような存在するのに見えて実は存在しないものを見分けるコツのようなものがあるのですか. それと地道に計算しなければ分からないのでしょうか.

お答え: ものによります. いくつかの具体的な  $(x, y)$  の値を代入してみるのもいいかもしれません.

質問:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$  のような (分母) = 0 となってしまう関数に極限は存在しないが 何故  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$  となるのですか?

お答え: “分母が 0 に近づく関数の極限值がない” というのが嘘です.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$  です.

質問:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$  が存在しないのは  $\frac{0}{0}$  の不定形になってしまうという解釈でいいのでしょうか?

お答え: よくありません. 「不定形だから極限が存在しない」という論法なら全ての連続関数は微分不可能になります.

質問: 結局, 連続可能性 (原文ママ: 連続性のことか) について  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  を  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)$  としたほうがよいという事に関して,  $h$  を入れた方がよい理由がイマイチよくわかりません.

お答え: この文脈では  $h$  を使った方がよい. なぜなら, 微分係数の定義を  $(f(a+h) - f(a))/h$  の極限としているので, これに合わせたほうがすっきりするから. もちろん “絶対” 後者を使った方がよいのではなく, 文脈に依存.

質問: 例 3.7 の 1 つ目の  $\cdot$  で  $h_n = \frac{1}{n}, k_n = \frac{1}{n}$  とおいたりして極限值が存在しないことを証明していますが, うまく

$h_n$  や  $k_n$  を見つけれられないときはどうすればよいですか。

質問:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  が「存在しない」というのは一意に定まらないという意味ですよね。

お答え: 違います。「一意に定まらない」というのは「いくつも存在する」ということを含んでいませんか? 極限値は「存在しない」のです。

お答え: こればかりは例をよく「見る」ことで見つかるしかないと思います。

質問: p. 19 例 3.7 で  $2xy/x^2 + y^2$  について. (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = 0$ , (3)  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = 0$ . (1) は関数の連続性に関して, (2), (3) は関係しないということで理解してよいですか。

お答え: よくないです。(1) は正しくありません。ある方向で極限をとると 1 になる, といっているだけで  $f(x,y)$  の極限値は 1 になりません。

質問:  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$  は  $\frac{0}{0}$  の不定形ではないのですか。どのように導いているのでしょうか。

お答え: 不定形ではありません。講義資料 3, 4 ページ 3 つめの質問参照。最初の  $y \rightarrow 0$  の極限をとる直前まで  $y \neq 0$  としておかなければなりません。 $y \neq 0$  を一つ固定すれば  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$  となりますから, ご質問の式のようになるのです。

質問: 例 3.7 で (1)  $h_n = \frac{1}{n}, k_n = \frac{1}{n}$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k_n) = 1$ ;  $h_n = \frac{1}{n}, k_n = -\frac{1}{n}$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k_n) = -1$ , であるとき (原文ママ: であるから) (2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  は存在しない。となるのは何故でしょうか。(1) と (2) の間の説明を教えてください。

お答え: まず“であるとき”ではなく“であるから”というのはいいですね。(1) は, この具体的に与えられた関数に対して確かに成り立っていることですから“であるとき”という仮定はそぐいません。その上で, 講義資料 19 ページ, 注意 3.6 の (vi)。

質問: 例 3.1 の二つ目の例  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$  について, 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1$  となるので  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  は存在しない」というのは, 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  も  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$  も  $x$  を 0 に近づける操作なのに別の値に収束するから  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  は存在しない」ということですか? もしそうなら,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  は存在しないことの説明は「 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \sin t$  で,  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t$  は振動するので  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  は存在しない」(原文ママ:  $t \rightarrow 0$  は  $t \rightarrow \infty$  の誤りか), でもいいのですか?

お答え: 前半: 正しい。後半: 正しそうだが, 正しい述べ方ではありません。“振動する”という言葉の定義はなんでしょう。高等学校の教科書にはたぶん“収束する”, “ $+\infty$  に発散する”, “ $-\infty$  に発散する”のいずれでもないときに“振動する”といっているようです。もし, 違う意味で“振動”という言葉を使っているとしたら, その定義をいってごらん下さい。

### $C^r$ -級

質問:  $C^2$  級であるならば, 2 回偏微分可能であるから, 必然的に 1 回の偏微分も可能であり,  $C^1$ -級でもあるということになるのでしょうか。

お答え: そうです。

質問:  $C^r$ -級について,  $f$  が  $C^r$ -級であるとは「 $r$  回微分可能で,  $f_{x\dots x}, \dots, f_{y\dots y}$  が連続である」という事ですか?

お答え:  $r$  回偏微分可能ですね。 $r$  回偏微分可能で,  $r$  次の偏導関数がすべて連続となることです。

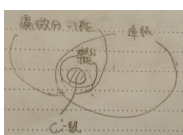
質問:  $C^3$ -級は  $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx}, f_{yyy}$  という認識でよろしいでしょうか。

お答え: よろしくありません。これは“3 次偏導関数”。 $C^3$ -級とはこれらがすべて存在して連続であること。

質問: 領域  $D$  で定義された関数  $f(x,y)$  において  $C^1$ -級は  $D$  の各点で  $f_x, f_y$  が存在し, それらが  $D$  で連続する (原文ママ: 連続であることか) とありましたが, それでは  $C^m$ -級はどうやって説明したらよいのでしょうか。

お答え: それが問題 3-6。上の質問と回答を参照。

質問: つまりこういう図ですか



お答え: そうです。

質問: 二変数関数の微分可能, 偏微分可能, 連続の関係は一方の変数を固定してもう片方の変数を微分した結果の連続

性で全部分かるということですか？(図省略)

お答え： 全部わかるわけではありません。

近似

質問： 連続性、微分可能性が 0 次, 1 次関数の近似(原文ママ: 0 次, 1 次関数での近似のことか)というのは 2 変数関数にも言えますか。

お答え： いえます。連続性、微分可能性の定義をよく見るとわかります。

質問： 関数をオイラー展開したときの各項は 0 次近似, 1 次近似, 2 次近似... というものと考えても問題ないのでしょうか。

お答え： オイラー展開ってなんでしょう。テイラー展開のことでしょうか。

領域

質問： 領域でひとつづきは分かるんですが、端がないの意味が分かりませんでした。教えて下さい。

お答え： たとえば  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  は“端がある”。実際、点  $(1, 0)$  はこの集合の要素だが、 $(1, 0)$  を中心としてどんなに小さい円を描いてもこの集合からはみ出します。このような点を“端”(数学用語ではない)とみなします。一方  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  の要素  $P$  をとると、 $P$  を中心とする円でこの集合からはみ出さないものをとることができます。

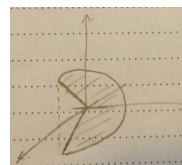
質問：“領域”の例であった  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  で等号を領域に含んだとき、領域外から近づく極限(?) を考えると面倒だということですが、どのようなことになるのでしょうか。

お答え： 閉区間  $[a, b]$  で定義された 1 変数関数の端点での微分可能性はどう定義したでしょうか。左端なら  $\lim_{h \rightarrow +0} (f(a+h) - f(a))/h$  と、右極限をとるのではないのでしょうか。集合  $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  で定義された関数  $f$  の  $(1, 0)$  での微分可能性や連続性を考えるには、 $(1, 0)$  に近づく  $\overline{D}$  内の経路を考えなければなりません。1 変数関数に比べてこの議論が複雑になるので、とりあえずは考えないことにしようということです。

質問： 資料を読んでも“連結”がピンときません。というより道  $\gamma$  がわかりません。これは  $(x, y)$  に対する写像のようなものですか？

お答え： たとえば  $\gamma: I = [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$  と定めると、これは  $\gamma(0) = (1, 0)$ ,  $\gamma(\pi) = (-1, 0)$  を結ぶ円弧を与えています。このように、道は“曲線”の数学的表現の一つです。

質問：  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $D$  が以下の図の用な場合は  $D$  は領域といえますか？(円板のようなものを切って、切り口をずらした様なものです)



お答え： いいえ。講義ノートでは  $\mathbb{R}^3$  の領域の定義を与えていませんが、その集合内の点にどの方向からでも近づくことができる必要があるので、各点の周りの十分小さい級を含む必要があります。

問題

質問： 2-5 の  $x, y$  の 3 次以下の多項式で調和関数となるものを全て求めなさい、で 3 次以下というのは  $x^2y^2$  の 2 元 4 次は含まれないという解釈でいいのですか？ また、3 次以下は  $x^n$  ( $n \leq 3$ ) でいいのでしょうか。方針が立たなかったのもそうですが、題意が把握できませんでした。  $f(x, y) =$  定数,  $f(x, y) = 1$  次式 は成り立ちそうなのですが、全てというはどう考えていいかわかりません。どうすればよいですか？

お答え：  $x, y$  の 3 次以下の多項式の一般形は

$$a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 + b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2 + c_0x + c_1y + p \quad (a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, p \text{ は定数})$$

です。

質問： 講義ノート問題 2-8 (略) について、テキストでは「定義通りに確かめて  $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$ 」とありますが、これがわかりません。 $(x, y) \neq (0, 0)$  として微分公式を使うと  $f_x = y - 2y^5/(x^2 + y^2)^2$  (原文ママ: 括弧を適切に使うべき) となり  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  とすると  $\frac{0}{0}$  となってしまいます。 $f_x(0, 0)$  とは「 $f_x(x, y)$  の  $(x, y)$  を経路によらず  $(0, 0)$  に近づけたときの極限值」ではなく「 $y$  を定数 0 として  $x$  で微分した  $f_x(x, 0)$  の  $x$  を 0 に近づけたときの極限值」なのでしょうか。

お答え： どちらも違います。偏微分係数の定義は

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

です。「定義により」直接計算すれば  $f_x(0,0) = 0$  はほぼ当たり前です。なお  $f_x(0,0)$  と  $(x,y) \neq (0,0)$  のときの  $f_x(x,y)$  の値とはとらえず関係ありません。 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0)$  となるのは、偏導関数  $f_x(x,y)$  が連続なときで、それには  $C^1$ -級という特別な名前がついています。ついでに  $0/0$  の不定形になったからといって極限值がないとは限りません。

質問： 問題 3-1 を解く際、「実数  $x$  に対して  $x$  を下回らない最小の整数」を表す記号が必要となり、ガウス記号で表現しようとしたが、うまく行きませんでした。一般にそのような操作はどのように表せばよいのですか？

お答え： 「 $k-1 \leq x < k$  を満たす整数  $k$ 」ではいかが？ 無理にガウス記号（ここでは  $[x]$  と書きましょう）を使うならば「 $[-x]$ 」でしょうか？

質問： 3-1 の答えが  $\frac{\alpha-1}{2} > k \geq \frac{\alpha-1}{2} - 1$  を満たす整数  $k$  になったのですが、合ってますか？

お答え：  $\alpha = 2$  のときは微分可能だが  $C^1$ -級ではない、ということは授業で扱いました。 $\alpha = 3$  のときはどうでしょう。同じようにやると  $C^1$ -級だが  $C^2$ -級ではないことになるはず。したがって、ご質問の答えと違うように思えます。上の質問と回答参照。

質問： 授業で言った「定義」の定義からすると、問題 3-6 は「2 変数関数が  $C^\infty$ -級であると定義する」でよくなってしまいませんか？

お答え： いいえ。「 $C^\infty$ -級」という言葉の意味を定めるのが定義です（これが授業で言った定義の意味）。したがって、「2 変数関数  $f$  が  $C^\infty$ -級であるとは...となることである」という形の文になります。

### 定義と定理

質問： 定義：  $\triangle ABC$  は正三角形  $\Leftrightarrow \triangle ABC$  の三辺の長さは等しい。

定理：  $\triangle ABC$  は正三角形  $\Rightarrow \triangle ABC$  の 3 つの角は全て  $60^\circ$

↑このような「定義と定理の使い分け」「 $\Leftrightarrow \Rightarrow$ 」の使い分けで正しいでしょうか。

お答え： ここに書いてあることは正しいです。「定理：  $\triangle ABC$  の 3 つの角は全て  $60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  は正三角形。」も正しいですね。

質問： 授業中に「3 つの辺の長さが等しい三角形が正三角形」であるというのが定義で「正三角形の 3 つの内角の大きさは等しく、全て  $60^\circ$  である」ということが定理であると言っていたが、この 2 つは同値であると思う。同値な二つの命題の一方が定義で一方が定理というのはおかしいと思う。両方とも定義というわけにはいかないのだろうか。

お答え： 「同値な二つの命題の一方が定義で一方が定理」という場面はこれからたくさんできます。このとき、それらを全て「定義」にしてしまうとおかしくありませんか？ 一つの概念の内容を規定するのは「ひとつの定義」であって、それを「言い換える」のがご質問のような定理です。ただし、同値な命題たちの中のどの一つを定義に採用するかは文脈によります。たとえば「3 つの角の大きさが互いに等しい三角形を正三角形という」ということを正三角形の定義にして議論をすすめてもよいわけです。この文脈では「正三角形の 3 つの辺の大きさは互いに等しい」ということが定理になります。いくつかの書物を参考にするときは、言葉の定義が違っている可能性に気を付けて下さい。

### その他

質問： 関数が連続であることや偏微分可能であることの証明をするためには、いちいち定義にしたがって計算するしかないのですか？

お答え： ケースによる。初等関数の連続性や微分可能性は既知としてよいように思います。

質問： 今回 class という語が出てきましたが、コンピューターの計算可能性がプログラミングでも見たことがあります。数学では class はどのような意味がありますか。そして、これらの class は全て同じ意味から来たものでしょうか（集合論とか）？

お答え： この講義では（特定の）“集合”という意味で使っています。プログラミングででてくるクラスとは少し違うように思います。数学用語としてのクラスには別の意味があったりしますが、この講義では扱いません。

質問： 「近い」とはどのくらいまでですか。

お答え： 難しい質問です。この“近さ”を定量的に扱う方法がいわゆる“ $\varepsilon - \delta$  論法”というもので、後期に扱います。現時点ではあまり気にしないでいい加減に考えてください。

- 質問： 実際に工学を勉強していく上で、変態な関数と出会うことはあるのでしょうか？ 正直変態な関数にはうんざりしています。
- お答え： 分野によってはあるようですが、その時気をつければよいです。ここでは“このような例がある”ということ を頭のすみにおいておいていただければよいです。
- 質問： 「変態」の意味を教えてください/変態になる 2 変数関数の特徴はありますか。
- お答え： 講義資料 3, 6 ページ, 下から 13 行目。
- 質問： 3.2 の文が定理で, 3.12 の文が命題とありますが, 違いが分かりません。
- お答え： 講義で説明したと思いますが, どちらも広い意味では“定理”です。そのうち, 重要性の高いものをとくに “定理”, それほど高くないものを“命題”, 他の定理や命題を証明するための補助きな定理を“補題”, 他の定理 から容易に導かれる定理をもとの定理の“系”という習慣あります。
- 質問：  $C^n$ -級の  $C$  って何の略ですか? / 「 $C^r$ -級」の  $C$  って何の頭文字ですか? /  $C^1$ -級はなんの “ $C$ ” なのですか? /  $C^1$ - 級は何かの頭文字ですか? / “ $C^l - 1$  級” (原文ママ) はなぜ  $C$  なのですか?
- お答え： continuous だと思います。
- 質問： 先生は偉いと思いますけど... お答え： 私はそう思いませんけど...
- 質問： 先生はえらいんですか? お答え： ないんです。
- 質問：  $\frac{16}{64}$  や  $\frac{19}{95}$  の他にも 3 ケタのやつでもいいんで教えてください!! お答え： 講義資料 2 参照。
- 質問： まだ早いのですが, 試験にそなえるために, 問題集かなにかが必要でしょうか。また必要であれば, オススメを 教えてください。先生の主観でのオススメで構いません。
- お答え： 講義ノート, テキスト, 演習の問題を合わせるとかなりの量になるはずなので, 山田は必要ないと思います。
- 質問： 予習はどの程度やればよいですか。
- お答え： 講義資料に目を通して下さい。“高等学校で学んだ” とある部分が記憶になれば思い出しておいて欲しい。
- 質問： 授業内容が抽象的になって取っつきづらいのですが, どのように理解を深めたらよいのですか。
- お答え： 今回はざっとした理解でよいと思います。第 4 節は具体的ですが, これは大丈夫ですね?
- 質問： 講義資料に「一般に ~ 」と書いてあるものは自明なこととして使っていいですか?
- お答え： 文脈依存。そこだけ切りだされてもお答えできません。
- 質問： ハイパボリックはどんなときにつかうのですか?
- お答え： ハイパボリック hyperbolic は形容詞ですから, 何かの名詞を修飾するときに使います。
- 質問： 偏導関数のグラフ上での意味はなんですか?
- お答え： それが第 5 節のテーマ (といいませんでしたっけ)。ちなみにグラフ上の意味以前に定義を知るべき。
- 質問： 偏微分可能であることと, 元の関数が連続であることは関係がないのですか。
- お答え： それが第 3 節で述べたこと。関係ありません。
- 質問： 2 変数以上の関数における微分可能の条件がやはりよくわかりません。
- お答え： どのへんがよくわからないんでしょうか。
- 質問： 偏微分可能,  $f_x, f_y$  が連続  $\Rightarrow$  微分可能 (山田注:  $\Rightarrow$  の下に  $\Leftarrow$  に  $\times$  印をつけたものがある), 偏微分可能が連続  $\Leftarrow$  微分可能 (山田注:  $\Leftarrow$  の下に  $\Rightarrow$  に  $\times$  印をつけたものがある)。これの違いがいまいちわかりません。
- お答え： 書いてあるとおりのことです。いまいち, ということはどこまでわかっているのでしょうか。
- 質問：  $C^n$ -級の「- (ハイフン)」は絶対に必要ですか?
- 質問：  $C^r$ -級の - (ハイフン) って何か意味があるのですか?
- お答え： ハイフンをつける人とつけない人がいます。ただし, 同じ文脈で混用するのは見苦しいと思います。
- 質問： 関数が連続であることのメリットは何ですか?
- お答え： 講義では“0 次近似”という言葉で説明しました。
- 質問： 0 次近似, 1 次近似... という感じに 2 次近似ってあるのですか。
- お答え： あります。後期 (テイラーの定理) で述べます。
- 質問： 調和関数の  $\Delta f = 0$  は定義ですか? それとも定理ですか? 定理だとすれば, 調和関数の定義とは何ですか?
- お答え： この講義の文脈では定義です。
- 質問： 2 変数関数の微分可能条件や連続, 偏微分可能かなどややこしいのですが, そのうち覚えられますか (原文ママ: 覚えられますかのこと?)
- お答え： 心がけ次第。
- 質問：  $C^1$ -級,  $C^2$ -級の違いをもう一度説明してください。

お答え： 講義ノートの定義が全てです．これを読んでどこがわからないか指摘してごらん下さい．

質問：  $\frac{2xy}{x^2+y^2}$  を「この人」とおっしゃっていましたが、これは人なのでしょうか．僕には人には見えません．

お答え： 私にも見えません．擬人法っていうやつです．英語でも口語では “this guy” なんて言うことがあります．

質問：  $C^\infty$ -級関数にはたとえばどのような関数がありますか？

お答え： 多項式、有理式、指数関数、対数関数、三角関数などは（定義域を適切にとれば） $C^\infty$ -級ですね．

質問： 実数の定義を教えてください． お答え： 第 1 回講義でのべたように、容易ではありません．後期にやります．

質問： (4.1) の  $\cot x := \frac{1}{\tan x}$  とかの「:」は何ですか お答え： 講義ノート 22 ページの脚注

質問：  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ,  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$  の関係のいい覚え方はありますか．

質問：  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ,  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$  が覚えにくいのですが、なにか良い方法はないですか？

お答え： 覚えにくいとは思いません．

質問： 余接、正割、余割は何のためにあるのですか．定義域を考えるのがめんどろうだと思いませんか？

お答え： めんどろうだから、あっちゃだめ、ということですか？ そうであればたいいものはあっちゃだめ．習慣的に  $\sin^{-1} x$  を  $1/\sin x$  の意味では使わない、という講義の説明では不満ですか？

質問：  $\sec x$ ,  $\operatorname{cosec} x$  と  $\frac{1}{\sin x}$ ,  $\frac{1}{\cos x}$ （原文ママ、対応が逆）はその場の状況（式が見やすいか、式変形の仮定がわかりやすいか等）に応じて使い分けてもいいのでしょうか．それとも  $\sec$ ,  $\operatorname{cosec}$  という表記があるのなら常にそちらを使うように統一したほうがいいのでしょうか．どちらの方が読むときに混乱しにくいですか？

お答え： 状況によって、でよいですが、いくつかの“結論の式”に混用されていると見苦しいかもしれません．

質問：  $\cos^{-1} x$  は  $\cos x$  の逆関数ですが、 $\cos^{-2} x = (\cos x)^{-2}$  になりますか？

お答え： そういう意味では使いません．

質問：  $\sinh x$ ,  $\cosh x$  というのは  $\sin x$ ,  $\cos x$  とどのような関係があるのですか？ 双曲線を示す（原文ママ、表すのことか）のは分かりますが、わざわざ  $(\sin, \cos)$  を使おうとする理由が分かりません．いっその事新しい記号で定義したほうがいいのではないかと思います．

お答え： 長い間、多くの人に使われてきた記号ですから、このクラスなどという小さい世界の一存では変えられません．講義ノートにもありますように三角関数に類似な性質が成り立つので類似な記号を使っていると思ってよいでしょう．これらの関数を複素変数の関数に拡張してやると  $\cosh ix = \cos x$ ,  $\sinh ix = i \sin x$  などの関係が成り立つのですが、この講義の範囲を超えます．

質問：  $\cosh x$  を先生は “コッシュ  $x$ ” と読んでいましたが、 $\sinh x$ ,  $\tanh x$  にもハイパボリックサイン、ハイパボリッククタンジェントではなくそのように短く読むことはあるのでしょうか．

お答え： あまり “正しい” 言い方でないのですおすすめしません．授業で口走ったらそうか... と思って下さい．

質問： 経済数学で微分の記号に  $d$  や  $\partial$  の他に  $\S$  という記号を使っているのを目にしたことがあるのですが、数学でこのような記号を目にしたことはありません．この記号を微分の記号として使うことは数学ではないのですか？

お答え： 不勉強なので経済学でこの記号を使うことは知りませんでした．できれば出典を教えてください．数学では使いません．

質問： いつもプリントの説明で「領域 a domain」とか「多項式 a polynomial」というように単語の後に英単語がありますが、英語の方は覚えた方がよいのですか？

お答え： 多分、そのほうが幸せになれることが多いかと思えます．

質問： 少し解説のスピードが早いです．もう少しゆっくりやってもらえると助かります．

お答え： Sorry. 今回は盛りだくさんですが、あまり細かくやってもよろしくないかと思ひまして、急ぎました．どのあたりが早いか指摘していただくと助かります．

質問： ナラバラナではなくバラナラバだったのが気になった．深い意味があるのですか？ お答え： ないです．

質問： 偏微分を使って役立つことはあるのでしょうか．微分と違って偏微分が問題解決の糸口になるとは思いません．

お答え： それは、あなたが考えている問題の範囲が狭すぎるからです．

質問： ゴールデンウィークはどこかへお出かけしますか． お答え： いまドイツです．