2013 年 5 月 21 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 6

前回までの訂正

- 波動方程式の d'Alembert の解法で $f\bigl(t(\xi,\eta),x(\xi,\eta)\bigr)$ を $f\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)$ と書いたそうです.
- 講義資料 5, 1 ページ，授業に対するご意見の 3 行目：イラスト ⇒ コントラスト
- 講義ノート 47 ページ，問題 6-6, ヤコビ行列の $(3,2)$-成分：$-\frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi \Rightarrow -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi$

授業に関する御意見

- 黒板の上の方が少し暗くて見にくいです．もう少し明るくなりませんか?　**山田のコメント：** 対応できますか＞担当の方
- わからないということがわかりました．ありがとうございました．　**山田のコメント：** 大事なことを理解しましたね.
- 先に式の例を出してから，一般的な話をしたらもっと分かりやすいと思います.
  山田のコメント： 今回の授業だと具体的にどういう順番に並べればよいでしょう.（今回は先に具体例を出した気がする）
- 小テストなどを行うことはありますか?　**山田のコメント：** ありません.
- たまに読めない文字がある.　**山田のコメント：** 申し訳ない．その場で指摘していただけるとありがたい.
- 質問用紙の先生のコメントが読めません．今回僕の質問はプリントにのりませんでした．こちらの質問の悪さもありますが，そうした人のためにもう少し読みやすいメモ書きをお願いします.
  山田のコメント： 申し訳ありません．こちらの手落ちです．今回の Q and A に付け加えています．丁寧にメモを書く時間はたぶんないので，お許しください．2 個目の質問の回答はあるみたいですね.
- 講義資料は毎回圧倒される量で（誤字なども少なくないですが）読み切れないまま質問しています．やはり以前の質問と同じものだと頭にきますか?（今回最も不安）　**山田のコメント：** 誤字はごめんなさい．そんなに頭に来ないが答えが引用になる.
- 「前回の講義資料に『質問は一つ』というお願いをした」とありますが，それは古いシステムですよね．もっとも悪いものの評価が得点になるという新システム上で質問させてもらいます.
  山田のコメント： たしかに 4 月 23 日の資料では「もっとも悪いものを評価する」といっていますね．この真意は授業で述べたはずですし，5 月 7 日の講義資料（こちらの方が "新しい"）にも書きました．すなわち "たくさんくると大変なので数を減らしたい"，ということです．それに「ご協力」いただきたいのですが，お嫌でしたら結構です．なお，現在の質問と回答のシステムを続けるとして，お一人お一人が 4 つも 5 つもの質問を書かれますと (1) 丁寧な字でコメントを書くことはできません (2) 見落としがたくさんでます．そのあたりはクラスの皆さんで了解しておいてください．よろしく.
- 高校の時の先生は適当な数の例をいうときに，素数を言っていましたが，山田先生はそういった数にきまりはありますか?（今回では 538 変数〜）　**山田のコメント：** ありません.
- 授業中のギャグっぽい発言がおもしろいです.　**山田のコメント：** つまらない，という人も多いです.
- 先生のカゼが治ったみたいで良かったです.　**山田のコメント：** ありがとうございます．ご心配おかけいたしました.
- 今日はずっと元気に聴けました．今日は暑いですね.　**山田のコメント：** ですね.
- ねむいです　**山田のコメント：** me, too
- 最近全く授業についていけなくなってきた.　**山田のコメント：** 今回は具体的な話だったけど，だめ?

質問と回答

■前回の掲載漏れ

質問： 方向微分の可能性はどう考えればよいですか.

お答え： 関数 f が点 (x_0,y_0) で 方向微分可能とは，すべての (u,v) に対して $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x_0+tu,y_0+tv)$ が存在する.

■チェイン・ルール

質問： 系 6.2 はどうして成り立つのですか?

質問： 命題 6.1 から系 6.2 へと導かれる過程はどのようなものなのでしょうか．聞きのがしていたらすいません.

お答え： η を定数とみなし，ξ だけの 1 変数関数と思って微分するのが "ξ に関する偏微分"．このとき x, y は ξ に関する 1 変数関数と見なすのだから命題 5.6 がそのまま使える（ということをの講義で口頭にて説明した).

質問： $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ とありましたが，これだと $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ になってしまわないんですか?　**お答え：** なりませんが，どうしてそう思ったのかが書かれていないので，これ以上お答えできません.

質問： 最初の方の板書で $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ と書いてあったように見えたのですが，行列なら $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ のカンマはつけてはいけないのでは?

お答え： 毎年ある質問ですが，行列はカンマを付けない，ベクトルはつける，と習うのでしょうか．線形代数では 1 行 n 列の行列に n 次行ベクトル，n 行 1 列の行列に n 次列ベクトルという別名をつけたので，行列とベクトルで記法の区別があるのは不自然に思います．山田はカンマの有無を区別していません.

質問： $f\bigl(x(u,v)\bigr)$ を u で偏微分するのに合成関数の微分法を用いた時，f は x の一変数関数ですから，$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{df}{dx}\frac{\partial x}{\partial u}$ のように立った d を使うのでしょうか? 立った d と丸い ∂ の使い分けがまだまだ分かっていません.

お答え： わかっているようです．これで結構です.

質問： 問題 6-4: $F\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)$ の F_x は $t=\sqrt{x^2+y^2}$ とおいた 1 変数関数を t で微分した $\frac{dF}{dt}$ と t を x で偏微分した $\frac{\partial t}{\partial x}$ の積でしょうか．d と ∂ の組み合わせが正しいでしょうか．つまり $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}$ でしょうか．

お答え： そうです．

質問： 「チェインルール」というのは $\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$ の式のことを指す言葉ですか．

お答え： $F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ という条件のもと，ですね．講義ノートでは系 6.2 をチェイン・ルールと言っていますが，ご質問の式（命題 5.6, 命題 6.1）もチェイン・ルールとよびます．

質問： p 40, 系 6.2 において $x=x(\alpha,\beta,\gamma)$, $y=y(\alpha,\beta,\gamma)$ の 3 変数関数であり，共に微分可能ならば，$\tilde{f}(\alpha,\beta,\gamma)=f\bigl(x(\alpha,\beta,\gamma),y(\alpha,\beta,\gamma)\bigr)$ は微分可能で，

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\alpha}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\alpha,\beta,\gamma),y(\alpha,\beta,\gamma)\bigr)\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\alpha,\beta,\gamma),y(\alpha,\beta,\gamma)\bigr)\frac{\partial y}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\beta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\gamma}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\gamma}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\gamma}$$

が成り立つとなりますよね? **お答え：**なります．

質問： 今日紹介した 3 変数関数のチェーンルールは n 変数関数でも適用するのでしょうか? **お答え：**はい．

■ヤコビ行列

質問： 行列で表すことの意義はうれしいから... というカンジのことをおっしゃってましたが，逆行列を使えるなどの計算上のメリットが大きいと思います．もしかしてギャグだったんでしょうか． **お答え：**... だから嬉しい．

質問： ヤコビ行列を使うことに「嬉しい」以外の意味はないのですか?/ ヤコビ行列はどのような場合に用いられるのですか? **お答え：**講義ノート 42 ページ，命題 6.5 が重要．で，嬉しくっちゃいけませんか?

質問： ヤコビ行列の「ヤコビ」って何ですか? 人の名前とかですか? **お答え：**Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851.

質問： $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ に関して黒板には「Jacobi 行列」とありましたが，講義ノートには「Jacobian matrix」とありました．どちらが正しいですか? **お答え：**同じです．Jacobian matrix の訳語がヤコビ行列．

質問： どうして Jacobian matrix の訳語がヤコビアン行列ではなくヤコビ行列なのですか．

お答え： 人の名前を形容詞として用いるときの，日英の習慣の違いだと思います．類似の使い方はリーマン多様体 Riemannian manifold, エルミート行列 Hermitian matrix, ブラウン運動 Brownian motion など．

■波動方程式

質問： $\frac{d^2f}{dt^2}-c^2\frac{d^2f}{dx^2}=0$, $f=f(t,x)$．これが波動方程式と述べていましたが，これは時刻 t におけるある位置 x における波の高さを表しているのですよね？あと波動方程式が上記のようになる原理はなんですか?

お答え： 方程式が違う．d でなく ∂；これは “重箱の隅” では断じてない．今回は弦の振動で意味を説明したが，それは理解した上ですね．波動方程式に限らず，数学で現れる方程式は，それ一つでさまざまな現象を表すのが普通．したがって “波動方程式は波の高さを表すのですか?” という質問はあまり意味がない．今回の講義で扱った弦の振動の場合，弦の変位が波動方程式を満たすのは，ニュートンの運動の第二法則と力の釣り合いの式による．

質問： $\frac{\partial^2f}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2f}{\partial x^2}=0$ $f=f(t,x)$ 波動方程式（文になっていないが，原文ママ）の件で，これは糸などの小さい振動についてとおっしゃいましたが，他にはどんな用途のどんな波動方程式があるのでしょうか．

お答え： 気柱の振動（管楽器を考えよ），電磁波など波と思われる現象．物理の教科書をみよ．量子力学などでも（すこし違う形で）波動方程式が現れますね．

質問： 波動方程式の一般解を求める過程で $\frac{\partial F}{\partial\eta}=\tilde{\varphi}(\eta)$ とおくところまでは理解できたのですが，そこで，なぜいきなり $F(\xi,\eta)=\int\tilde{\varphi}(\eta)d\eta+\psi(\xi)$ と出てくるのかが分かりません．

お答え： $\partial F/\partial\eta$ が $\tilde{\varphi}(\eta)$ ということは，ξ を一つ止めるごとに F_η は $\tilde{\varphi}(\eta)$ という (ξ によらない)η の関数．したがって，ξ を一つ固定するごとに $F(\xi,\eta)$ は (η の関数と思って微分して $\tilde{\varphi}(\eta)$ となる関数である．したがって η で積分する（原始関数を求める）と $F(\xi,\eta)=\int\tilde{\varphi}(\eta)\,d\eta+$ (積分定数)．ただし，積分定数は ξ の値が変わると変わる可能性があるので，ξ の関数 $\psi(\xi)$ と書くことができる．実際，$\psi(\xi)$ は η で偏微分すると 0 になるので，この項を付け加えても等式 $F_\eta=\tilde{\varphi}(\eta)$ に影響しない．したがって $F(\xi,\eta)=\varphi(\eta)+\psi(\xi)$, ただし $\varphi(\eta)=\int\tilde{\varphi}(\eta)\,d\eta$.

■ラプラシアン

質問： 調和関数には対称式 ($\log\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ などを教科書で見ました）だけでなく，$\tan^{-1}\frac{y}{x}$, $\frac{x}{x^2+y^2}$ なども そうなので，正直調和関数になる条件がわかりません．たとえば $f(x,y)$ に対し $f_{xx}+f_{yy}=0$ となるものには共通してる点があるのでしょうか．

お答え： $\Delta f = 0$ というのが共通している点です（当たり前）．すなわち “どんな式の形になるか” が重要ではなく，“$\Delta f = 0$ を満たしている” というものが重要なのです．もちろん，調和関数がもっている特別な性質というのもあります．平均値の定理とか，最大値の原理とか調べてみるとたくさんあるのですが，この講義の範囲は超えます．

質問： 調和関数であることがわかるとどんないいことがあるのですか? $\Delta f = 0$ だとグラフに何か特徴がでたりするのですか? **お答え：**なんでグラフを考える必要があるんですか? 上の質問・回答を参照．

質問： ラプラス作用素は物理などで使うときは公式として覚えて使うのでいいのですか．

お答え： はい，もちろん公式として覚えて下さい．そうでないと生活に支障をきたします．

質問： ラプラシアンが何の役に立つのですか? **お答え：**今回配布する講義ノートの第 8 節．あるいは量子力学で現れるシュレディンガー方程式，確率論でも画像処理でも現れます．ということを聞きたかったのでしょうか?

質問： Δf は f の何を表しているのですか? **お答え：**f にラプラシアンを施すことによって得られる関数．

質問： 調和関和（原文ママ：調和関数のことか?）($\Delta f = 0$) が具体的に何を示しているのかわかりませんでした．物理でどのようなときに使われるのですか． **お答え：**あらゆるところ．今回配布する講義ノートの 8 節など．

質問： 講義の後半は「$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ を F の r と θ の偏導関数で表す」というテーマだったのに $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ という結論なのはおかしくないですか? 計算したら $\Delta f = F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}$ となったので書き間違いではないでしょうか?

お答え： もちろんご質問後半の書き方が正確ですが，講義ノート 40 ページ，注意 6.3 に従うと，前半の書き方もあり，ということになります．（講義の最初の方で $\tilde{f}(\xi,\eta) = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ を $f(\xi,\eta)$ とも書く，という説明をしましたね．）物理の教科書などでは，前半の方の書き方が多いので，慣れてください．

■極座標

質問： 授業中は，極座標の偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta < \pi$ としていましたが，そうすると変数変換の際の $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ がほとんどの場合に 2 つ解をもってしまいます．いいのでしょうか．それとも，このような変数変換の際は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲しか考えないのでしょうか．

お答え： x 軸の負の部分と原点を除いた座標平面上の点 (x,y) に対して，(r,θ) $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ で次を満たすものをとってくれば，これは変換 $(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ の逆変換である：

$$(*)\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \left(\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\pi < \theta < \pi \text{ を満たす } \theta. \right)$$

実際，与えられた (x,y) に対して $(*)$ の θ ただひとつ定まる．ここで θ を x と y の “式” で書きたいなら θ の範囲を $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に限り，(x,y) の動く範囲を第 1 象限と第 4 象限および x 軸の正の部分に限れば $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ と書ける．なお，C や Fortran (古いね!) の数学ライブラリには atan2 (ATAN2) という関数が用意されていて，atan2(x,y) は $(*)$ の θ を返すようになっている．というのが講義で説明したことでした．

質問： 変数変換の座標平面の極座標のところで，授業では $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ としていましたが，なぜ $\theta = -\pi, \pi$ が含まれていないのでしょうか．直交座標にしたとき x 軸の $x < 0$ の部分が除かれていることに疑問がありました．

お答え： おっしゃる通りで，x 軸の $x \leqq 0$ （原点ものぞく）除いています．(r,θ) 平面上で (r,θ) が動く範囲を領域にしたいからです．たとえば $-\pi < \theta \leqq \pi$ の範囲にすると (r,θ) の変域が領域になりません．実際は θ の範囲を広げることもありますが，講義ノートでは定義域を “領域” としているのでそれに合わせています．

質問： 変数変換のあたりで $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ とおきましたが，これでは r と θ を用いて $(x,y) = (-1,0)$ のような部分を表せません．授業では $(r,\theta) \to (x,y)$ が 1:1 対応だといっていたのでこれは問題ないのですが，元が (x,y) 座標系であったゆえに $(x,y) \not\to (r,\theta)$ の部分が存在しているのがよろしくないと思います．いかがでしょうか．

お答え： 上の質問と回答参照．(r,θ) 平面の領域と (x,y) 平面の領域が $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で 1 対 1 に対応しているようにするためには，この範囲が最大です．なお，“領域” の定義は講義ノートの第 3 節．

質問： 変数変換のところで，原点は $\sqrt{x^2+y^2}$ で割るために除いたのだと思いますが，なぜ $y = 0$, $x < 0$ を満たす部分を除いたのでしょうか．$-\pi < \theta \leqq \pi$ や $-\pi \leqq \theta < \pi$ にしてはいけないのでしょうか?

お答え： 一般の変数変換ではなく極座標変換のことでしょうか．上の 2 つの質問，回答をご覧ください．

質問： 「よくできたフライパンの熱の伝わり方は θ によらない」とのことですが，それはフライパンの原点のみで加熱するか，原点を中心とするある円上をすべて加熱するなどの特別な場合のみではないですか?

お答え： おっしゃる通り．ただし原点は中心と言い換えた方がよいのでは?

質問： 空間の極座標表示を使うと便利な例はありますか．あったら教えてください．

お答え： 水素原子の波動関数を求めてごらんなさい．量子力学の教科書には大抵載っていると思いますが，シュレディンガー方程式に含まれるラプラシアンを極座標表示して変数分離します．極座標をつかうと大変便利です．

■その他

質問： $\log|\varphi'| = -\log r + \mathrm{const} = \log\frac{\mathrm{const}}{r}$ とするのではなく，$\log|\varphi'| = -\log r + \mathrm{const}$, $\varphi' = e^{\mathrm{const}-\log r}$ として r, φ' の初期条件を調べることで $\varphi' = e^{?}$ の形で表してもよいですか?

お答え： 2 つの方法が違うようには見えないのですが．"表してよいですか" というのは結論まで出してから聞いたほうがよいのではないでしょうか．あなたが考える "?" の部分は何ですか? ちなみに $e^{\log r} = r$ です．

質問： 命題 6.8 について，「$d(F^{-1})\bigl(F(x)\bigr) = \bigl(dF(x)\bigr)^{-1}$」は「$d\bigl(F^{-1}(x)\bigr)\bigl(dF(x)\bigr)^{-1}$」の間違いですか．

お答え： いいえ．左辺は $d(F^{-1})$ の点 $F(x)$ における値を表しています．

質問： 全微分が何であるかの説明がなかったので詳しく説明してください．図形的意味を含めて偏微分とどのような違いがあるととらえるべきか説明して下さい．

お答え： 2 変数関数 f に対して行ベクトル $df = (f_x, f_y)$ を f の全微分という．それだけです．偏微分とは，この全微分の各成分のことだから，"どうとらえるか" と言う前に "違うもの" です．図形にこだわらる理由が分かりませんが，f の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は積 $(df)_P\boldsymbol{v}$ （講義ノート (5.4) 式）で表されますから，全微分はあらゆる方向の方向微分の情報をもった量ということができます（というのが 5 月 7 日の講義でした）．

質問： $\gamma(t) = {}^t\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ の t っていりますか? **お答え：**行ベクトル df と列ベクトル $\dot\gamma$ の積を考えたいのでいる．

質問： プリント系 6.2 で使われている $\tilde f$ の $\sim$ にはどんな意味があるんですか.

質問： プリント p 40 系 6.2 ででてくる f の上の 「∼」 の名称はなんですか？また，どういう意味がありますか.

お答え： 読み方は "tilde", "なみ", "にょろん"．f に対応する，少し違ったものを表すのに使った．中学校や高等学校で "△ABC と △A′B′C′" などと書いた．これは，関連しているので似た記号を使いたいときに，A に飾り $'$ をつけて A′ としたもので，$\sim$ も同様な使い方だが，微分の文脈で f' は使いたくないので $\tilde f$ とした.

質問： ξ が上手に書けず，四分音符（原文ママ：四分休符のことか）のようになってしまいます．上手な書き方を教えて下さい. **お答え：**講義資料 4, 4 ページ 7 つめの質問と回答.

質問： クサイ，エータに代用できる書きやすいギリシャ文字無いんでしょうか.

お答え： 書きにくいとは思いません．たくさんの人が使っているのであなた一人が抵抗してもだめです.

質問： θ の発音のコツを教えて下さい. **お答え：**英語国民は "theta" と言っているようです.

質問： 数学で使う文字（ξ, η とか）って何の（もしくはどこの）文字なんですか?

お答え： 授業中に何遍も "ギリシア文字" と言ったはずですが．高等学校の教科書にも書いてあります.

質問： 先生には 538 変数関数を微分する気力はありますか? 自分はないです.

お答え： $f(x_1, x_2, \dots, x_{538}) := \sum_{j=1}^{538}(x_j)^2$ とすると $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2x_k$ $(k = 1, \dots, 538)$．これくらいの気力はあります.

質問： 「旅」の定義ってありますか? **お答え：**ありません．講義ノート 35 ページの "曲線" のことを指しています.

質問： 偏微分を積分するのは可能なのでしょうか?

お答え： どんなものを想像していますか．一変数関数の "微分を積分する" という操作のどの部分を一般化したいですか?

質問： 前回の練習問題 3 が分かりませんでした．数字教室（原文ママ）でもきこうとおもいます.

お答え： 問題 5-3 のことでしょうか．"数学相談室" ですね．ご利用ください.

質問： 先生が授業中笑顔なのは放送を意識しているからですか. **お答え：**いいえ．作り笑いが好きなんです.

質問： ちょっとわかりずらい（原文ママ："づらい" が正しいです）授業を心がけている理由は何ですか.

お答え： 昔，学生さんから「講義がわかりやすく，その場でわかった気になって復習しなかったら，最後にわかっていないことに気がついた」というクレイムをいただきました．その場でわかった気にならないで，その場で復習をしてもらいたい，そして自分の頭で理解してもらいたい．そのためにはその場で解った気になる説明は邪魔なのでは，ということです．というわけで，「受講者の意見のフィードバックをした結果」です.

質問： テストって難しいんですか? **お答え：**一般的には "易しい" つもり．あなたにとってどうかは知らない.

質問： 前期試験の得点開示で数学の点数が底上げされている気がします．実際底上げされていますか?

お答え： われわれの授業の文脈では前期試験とは前期の期末試験と思うのが自然だと思いますが，違うものを指しているようですね．きちんと言わないと伝わりません．質問を察しますと，回答は「お答えする権限がありません」.