2013 年 5 月 28 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 7

お知らせ

- 前回の授業では，誤って最終修正を入れる前の配布物（講義資料 6，及び講義ノートの 8 節）を印刷してお配りしてしまいました．OCW, OCW-i および講義 web ページには修正版を上げておきます．
- 6 月 18 日（火）に中間試験を実施します．その 2 週間前（6 月 4 日）の授業の際に，試験の予告をいたしますので，普段出席されていないかたもどうぞお誘い合わせの上おいでください．
- 6 月 25 日（火）の授業は，5 類の先生による特別講義となります．こちらも必ず出席してください．

前回までの訂正

- 講義資料 6, 1 ページ一番下：ということをの講義 ⇒ ということをこの講義
- 講義資料 6, 3 ページ下から 5 行目：$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- 講義資料 6, 3 ページ一番下：$\mathrm{atan2}(x,y) \to \mathrm{atan2}(y,x)$
- 講義資料 6, 4 ページ 4 行目：覗いている ⇒ 除いている
- 講義ノート 49 ページ 10 行目：陰感数定理 → 陰関数定理；「感じたんですね」とか「ひわいです」などのご意見をいただきました．お恥ずかしい限りです．
- 講義ノート 52 ページ 7 行目：$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$
- 講義ノート 49 ページ 13 行目の $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ は $F_x(x_0,y_0) \neq 0$ の誤りではないか，というご指摘が複数ありましたが 誤りではありません．実際，例 7.1 ($F(x,y) = x^2+y^2-1$) で $(x_0,y_0) = (1,0)$ を考えると $F_x(x_0,y_0) = 2x_0 = 2 \neq 0$ ですが，図形 $Y = \{(x,y)\,|\,F(x,y) = 0\}$（単位円です）と $(1,0)$ を含む領域 U との共通部分 $Y \cup U$ は，U をどんなに小さくとっても $y = \varphi(x)$ のグラフで表すことができません．また，微分公式 (命題 7.7) を見ても $F_y \neq 0$ の方が必要だと思えませんか?

授業に関する御意見

- 多変数関数の微分を学習する前に，極限や微分法の理解を学習すべきだと思う．その方が多くの本で採用されている標準的なカリキュラムだから，色々な本で自習しやすいので講議（原文ママ）についていけなくても自習で追いつけると思う．
  山田のコメント： 工学部の要望によってこのカリキュラムが実現しました．ご意見があったことはつたえておきます．
- プリントの問題の解答は教えていただけるでしょうか．
  山田のコメント： 4 月 9 日の講義概要 2 ページ 10 行目；講義資料 1 の Q and A 参照．
- 人が減って来ましたね．　**山田のコメント：** まだそれほどでもない．
- この授業を聞いている高校生はいるのでしょうか．熱心なことですね．　**山田のコメント：** まったくです．
- いよいよあつくなった　**山田のコメント：** ですね．
- 暑くなってくるころですが，冷房をギンギンにきかすと，僕の腹が悲鳴をあげます．どうしましょう．
  山田のコメント： 場所によってエアコンの効きが違うように思います．探ってみてください．
- テストがこわいです ((((; ﾟДﾟ)))))　**山田のコメント：** me, too．どんなに解ってないかが解ったりすると怖い．
- だんだんついていくのが苦しくなってきました．頑張ります．　**山田のコメント：** はい．
- “$Y \to$ ¥” のギャグはかなり面白かったと思います．(1 人でクスクス笑ってました) / ¥のくだりおもしろかったです．
  山田のコメント： あまり受けてないのかと思った．
- TeX をこの前使いましたが大変でした．この講義ノートも時間がかかりそうに思えます．
  山田のコメント： なれるとたいしたことはないんです．
- くだらないものを思いつきました → 「変態関数と笑わない学生」　**山田のコメント：** 森博嗣風ですね．
- レム二スケートっておいしそうな名前ですね．オムレツみたいな．　**山田のコメント：** そう?
- $\{(x-1)^2+y^2\}\{(x+1)^2+y^2\} = c^2$　**山田のコメント：** え?
- わからない → 眠い → 寝る → もっとわからなくなる → (先頭に戻る)　**山田のコメント：** そうだね．
- とてもわかりやすいです．　**山田のコメント：** うそ．
- たのしいです　**山田のコメント：** え?
- 思いつかなかったです．　**山田のコメント：** どうも．
- つらい/ねむい　**山田のコメント：** me, too
- 気がついたら いつも同じ講義寝る そしていつも内容分からない
  諦めずに 気合いを入れて講義にでるけど すぐにまぶた落ちるよ
  山田（敬称略）にセンスがあれば 楽に講義中に起きれるけど
  何回受けても 何回受けても 僕の意識保てないよ
  チェインルールの誰得感ハンパじゃない 真面目にノート取り続けてもいずれは意識とばされる
  缶コーヒーも試してみたけど 正直全然効き目ない
  だけど いつか絶対克つために 僕は欠席だけは最後までとっておく
  山田のコメント： センスわるくてごめん．

質問と回答

質問： 「なめらかな曲線」の定義が抽象的でよく分かりません．$F(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の形と $x=\psi(y)$ の形にかければ「なめらかな曲線」なのですか?

お答え： いいえ．“$F(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の形 や $x=\psi(y)$ の形” の方がより正しいと思います．講義ノート 50 ページに述べてある定義は実は次と同値です（証明は省略）：集合 C がなめらかな曲線であるための必要十分条件は，各点 $P=(x_0,y_0)\in C$ に対して P を含む領域 U と C^∞-級関数 φ をうまくとってやれば $C\cap U$ が $y=\varphi(x)$ のグラフ，または $x=\varphi(y)$ のグラフになっていること．**例**：$F(x,y)=x^2+y^2-1$ に対して $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)=0\}$ を考え，点 $P=(x_0,y_0)\in C$ をとる．(1) $y_0>0$ の場合，$U_+=\{(x,y)\,|\,y>0\}$ は P を含む $\mathbb{R}^2$ の領域で，共通部分 $C\cap U_+$ はグラフ $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ と表される（$x=\pm1$ でも $\sqrt{1-x^2}$ は定義されるが，この点で微分可能でない）．(2) $y_0<0$ の場合，$U_-=\{(x,y)\,|\,y<0\}$ は P を含む $\mathbb{R}^2$ の領域で，$C\cap U_-$ はグラフ $y=-\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ と表される．(3) $y_0=0$ の場合，x_0 は 1 または -1 である．(3a) $P=(1,0)$ のとき，$V_+=\{(x,y)\,|\,x>0\}$ とおくと V_+ は P を含む領域で，$C\cap V_+$ は $x=\sqrt{1-y^2}$ $(-1<y<1)$ と表される．(3b) $P=(-1,0)$ のとき，$V_-=\{(x,y)\,|\,x<0\}$ とおくと V_- は P を含む領域で，$C\cap V_-$ は $x=-\sqrt{1-y^2}$ $(-1<y<1)$ と表される．以上から C はなめらかな曲線である．

質問： 講義ノート p. 49 の陰関数定理のところで「この定理は (x_0,y_0) の十分近くで，$F(x,y)=0$ が $Y=\varphi(x)$ の形にとけることを表している」とありますが，定理 7.2 の後半の「点 $(x,y)\in U$」の点 (x,y) が (x_0,y_0) の十分近くの点だということを意味しているのでしょうか.

お答え： はい．一つ前の質問と回答参照．“F の定義域全体でなく，少し狭い領域 U に限れば” と読んで下さい.

質問： 点 $(x_0,y_0)\in Y$，$y_0\neq0$ の近くでは $y=\varphi(x)$ の形で書ける，とありましたが，「$\sim$ の近くで」というのは何故必要なのですか.

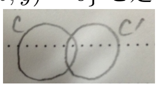
お答え： 2 つ前の回答の例参照．この例 $(x^2+y^2-1=0)$ は関数のグラフでは書けないが，たとえば点 $(1,0)$ の近く（U_+）では $y=\sqrt{1-x^2}$ と書ける．こういうケースを想定しているので “近く” という条件は必要です.

質問： 円をグラフで表すときに，見方を 90° ずらせば 1 周表せるということですが，その切り替えに厳密な決まりはありますか.　**お答え：**厳密に決まりはありませんが，3 つ前の回答が “切り替え” をきちんと書いた例です.

質問： 定理 7.2 から命題 7.4 をどう導きだせばいいのでしょうか.

お答え： やってみます：$P=(x_0,y_0)\in C$ とする．(1) もし $F_y(x_0,y_0)\neq0$ ならば，定理 7.2 より P を含む領域 U と C^∞-級関数 φ が存在して “$(x,y)\in U$ かつ $F(x,y)=0$ であるための必要十分条件は $y=\varphi(x)$” とできる．ここで，“$(x,y)\in U$ かつ $F(x,y)=0$” とは “$(x,y)\in C\cap U$” ということだから，この状況は $C\cup U=\{(x,y)\,|\,y=\varphi(x)\}$ とかける．すなわち $C\cup U$ はグラフ $y=\varphi(x)$ となる．(2) もし $F_y(x_0,y_0)=0$ ならば，仮定より $F_x(x_0,y_0)\neq0$．このとき，x と y の役割を入れ替えて定理 7.2 を適用すれば，P を含む領域 U と C^∞-級関数 ψ が存在して “$(x,y)\in U$ かつ $F(x,y)=0$ であるための必要十分条件は $x=\psi(y)$” とできる．これは $C\cup U$ が $x=\psi(y)$ と表示される，すなわち，グラフ $y=\psi(x)$ と合同であることを示している.

以上より，C の各点 P に対して P を含む領域 U が存在して，$C\cup U$ は C^∞-級関数のグラフと合同になる.

質問： 定理 7.2 における C^r-級関数 F においての集合 $C=\{(x,y)\,|\,F(x,y)=0\}$ と定理 7.4 における C^∞-級関数 F においての集合 $C'=\{(x,y)\in D\,|\,F(x,y)=0\}$ はベン図で書くと 

ですか?

お答え： 定理 7.2 でも F の定義域は D ですから，$C=\{(x,y)\in D\,|\,F(x,y)=0\}$ と書けますね．実際 $(x,y)\in D$ でなければ $F(x,y)$ が意味を持ちません．ということで，図としては間違っていないのかもしれませんが（交わっていない部分が空集合と思えばよいですね）$C=C'$ です．ちなみに C も C' も “平面曲線” を想定していますから，こういう絵を書くのはあまり関心しません.

質問： 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して「$f(x,y)=c$ (c は定数) が $y=\varphi(x)$ や $x=\psi(y)$ と陰関数表示できる」$\Leftrightarrow$「x と y は 1 対 1 対応である」で合ってますか？

お答え： いいえ．$f(x,y)=x^2-y=0$ は $y=x^2$ と書き換えられるが，$x\mapsto y$ は 1 対 1 対応ではない.

質問： もし $F_x(x_0,y_0)=0$ かつ $F_y(x_0,y_0)\neq0$ なら y が x の陰関数でありながらなめらかなグラフにならなかったりしますか???　**お答え：**なめらかな関数のグラフで書けるということを主張しているのが定理 7.2.

質問： 陰関数 $f(x,y)=0$ について $f_y(x_0,y_0)\neq0$ でなければ（原文ママ：$f_y(x_0,y_0)\neq0$ であれば，が正しい）その

点の近辺では $y=\varphi(x)$ の形にとけるということですが，仮定した "$f_y(x_0,y_0)\neq 0$" がないとどんな不都合がおきますか．たとえば $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の $y=0$ の近くでは $f_y(x,0)=0$ であって，この近くでは x から y が 1 つに定まらない (?) のは何となくわかりますが...

お答え： 後半で "$y=0$ の近く" ということですが，実際に $f_y=0$ となるのは $(x_0,y_0)=(1,0)$, $(-1,0)$ の 2 点だけです．これは大丈夫ですね．さて，$f_y=0$ となる点の回りでどうなっているかは，いろいろです．たとえば (1) $f_1(x,y)=x^2+y^2-1$, $P=(x_0,y_0)=(1,0)$．このときは図形 $f_1(x,y)=0$ は P の近くで $y=\varphi(x)$ の形には表せない．(2) $f_2(x,y)=x-y^3$，$P=(x_0,y_0)=(0,0)$．この点で $f_y=0$ であるが，図形 $f_2(x,y)=0$ は関数のグラフの形（$y=\sqrt[3]{x}$）の形になっている．しかし，0 で $\sqrt[3]{x}$ は微分可能でない．この場合 $f_x(0,0)=1$ で，$x=\psi(y)$（$\psi(y)=y^3$ は C^∞-級関数）と表される．(3) $f_3(x,y)=\left(x^2+y^2-1\right)^2$，$(x_0,y_0)=(0,1)$．この点で $f_{3,x}(0,1)=f_{3,y}(0,1)=0$ が成り立っているが，図形 $f_3(x,y)=0$ はこの点の近くで $y=\sqrt{1-x^2}$ と表される．

質問： P 50，なめらかな曲線の定義で「C^∞-級関数のグラフと合同である」の意味がわかりません．

お答え： たとえば $\{(x,y)\,|\,x=y^3\}$ はグラフ $y=\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$ で表されますが，$\varphi(x)$ は 0 で微分可能ではありません．しかし，この図形はグラフ $y=x^3$（C^∞-級関数のグラフ）を直線 $y=x$ に関して折り返して得られるので，"ある C^∞-級関数のグラフと合同" ということになり，考えている図形はなめらかな曲線となります．

質問： $\frac{d\varphi(x)}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ について，定理 7.2 より $F(x,y)=0$ は (x_0,y_0) の近くで $y=\varphi(x)$ の形に解けるならば $F(x,\varphi(x))$ とかけるので（原文ママ：正しくは $F(x,\varphi(x))=0$ なので）$F_x+F_y\frac{d\varphi}{dx}=0$ より $\frac{d\varphi(x)}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ ということがいえると考えてよいでしょうか．　**お答え：**よいです．

質問： どうやって $\frac{d\varphi(x)}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ から $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ になるのか．　**お答え：**$y=\varphi(x)$ とおくと後者がでる．

質問： Cassinian oval のように c の値を変えると曲線の形が変わっていくおもしろいものはありますか．

お答え： 簡単なのは $x^2-y^2-c=0$．楕円，双曲線，放物線がすべてでてくるファミリーなんてつくれませんか?

質問： 授業中に扱ったレムニスケートについて，点 $(0,0)$ でなめらかでないといっていましたが，なぜそういえるのですか．　**お答え：**$(0,0)$ を含む領域上で $y=\varphi(x)$，$x=\varphi(y)$ いずれの形にも表せないからです．

質問： 一般に n 変数関数 F について，$F(x_1,\dots,x_n)=0$ で F_{x_1}, F_{x_2}, $\dots$, F_{x_n} がすべてゼロでなく，$x_1=f_1(x_2,\dots,x_n)$, $x_2=f_2(x_1,x_3,\dots,x_n)$,$\dots$, $x_n=f_n(x_1,\dots,x_{n-1})$ と書けるとき，$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\dots\frac{\partial x_n}{\partial x_1}$ は n が偶数のとき 1, n が奇数のとき -1 となりますか．ただし n は 2 以上の整数です．　**お答え：**そうですね．

質問： 命題 6.8 の $d(F^{-1})(F(x))=(dF(x))^{-1}$ はどのように求まるのですか．（$dF^{-1}=(dF^{-1})$ の方はわかります）

お答え： 左辺は dF^{-1} の $F(x)$ における値，右辺は dF の x における値の逆行列．

質問： $\{(x+1)^2+y^2\}\}(x-1)^2+y^2=c^2$ についての xy 平面におけるグラフは $c\to\infty$ で円に近づいていくということで大丈夫ですか?　**お答え：**いいえ．$c\to\infty$ では発散．単語 "グラフ" を講義と違う意味で使っていますね．

質問： レムニスケイト曲線は極座標表示は可能ですか？可能ならば cos だけの形にまとめられそうなのですが．

お答え： $r^2=\mathrm{const.}\cos 2\theta$.

質問： Cassinian oval がレムニスケートになるのは $c=1$ ですが，へこみがちょうどなくなるのは c がいくつのときですか．　**お答え：**$c\geqq 2$．どうやって確かめる?

質問： レムニスケートのつづりは lemniscate でした．　**お答え：**Thanks.

質問： C^∞ の条件は何のためについているんですか（授業中の例題

お答え： 定理 7.2 のことでしたら $F(x,y)$ の微分可能性（講義ノートでは C^r-級を仮定している）から，関数 φ の（同じ階数の）微分可能性が従う，ということを述べたかった．

質問： 陰関数の定義って何ですか．　**お答え：**ないんです．$F(x,y)=0$ をといて $y=\varphi(x)$ となるとき，前者を後者の "陰関数による表示" という言い方をしますが，厳密な定義のある語ではありません．

質問： 「2 変数関数による標高は部分的に見ればグラフとして捉えることができる」というところをもう少しくわしく教えて下さい．　**お答え：**標高ではなく等高線．それをくわしく言ったのが定理 7.2 です．

質問： 「$F(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ の形にとける」ってどういうことですか．　**お答え：**それを述べたのが定理 7.2.

質問： 「y は x の関数である」というのは x が与えられた時，対応する y が 2 つ以上存在した時は言えないのですか? たとえば $y=\pm x^2$ において y は x の関数でないということですか．y は x に関して定まる数であると思うのですが．　**お答え：**言えません．講義ノート 4 ページ例 1.2.

質問： 陰関数というものがあるのならば陽関数というものはあるのでしょうか？もしあるのならばどのような関数でしょうか？

お答え： 量 x, y が $y=\varphi(x)$ の形に表されているとき，y は x の関数として陽に表されている，または y は x の陽関

数ということがあります．すなわち，普通の意味で関数になっているということです．したがって，数学の文脈ではわざわざ “陽関数” ということは稀です．ちなみに “陰関数” は implicit function です．“陽に表せる” というのはよく “explicit に表せる” ということがあります．

質問： y が x の関数であるとき，$f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ と表せますが（原文ママ：ここの f はなんだろう）$f(x,y)=0$ は陰関数，$y=\varphi(x)$ は陽関数といいますよね．y が x の関数のときは陰関数と陽関数は本質的に同じということですか?

お答え： 陰関数，陽関数という言葉は，量の関係の表し方の呼称で，関係の性質（関数と思えるか，など）のことではありません．したがって（多分）ご質問のケースは，陰関数表示と陽関数表示の間を自由に行き来できる例です．

質問： $y=\varphi(x) \Leftrightarrow f(x,y)=0$ のとき $y=\varphi(x)$ は $f(x,y)=0$ の陰関数であり（教科書 40 ページ）$F(x,y)=0$ (原文ママ：この文脈だと $f(x,y)=0$) は $y=\varphi(x)$ の陰関数表示である（プリント 48 ページ）ということでよろしいでしょうか.

お答え： 教科書の言葉の使い方はそう．$y=\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ の陽関数による表示，ということもあります．

質問： 何故陰関数は陰という字を使うのですか? 陽関数ではダメですか? それとも陰に意味があるのですか?

お答え： 陰は implicit の訳語です．陽関数というと違うものを指します．

質問： 陽関数を陰関数にしてから微分することにメリットはありますか?

お答え： この授業ではそういうことはしていないと思います．陰関数表示された関数を，陽に解かずに微分する，という例は挙げましたが．数学で述べるのは事実であって，メリットがあるかどうかは使う側が考えること．

質問： 黒板の (3) で「点 $(x_0,y_0)\in Y$ とすれば $y_0\neq 0$ の近くでは...」とありました．$y_0=0$ の近くの間違いでは?

お答え： いいえ．「前回までの訂正」の最後の項参照.

質問： 2 変数関数を $y=\varphi(x)$ の形に書いて，どうやってグラフの予測につながるかいまいちわかりません.

お答え： “いまいち” ということはどれくらいわかっているのでしょうか．“2 変数関数を $y=\varphi(x)$ と書く” のではなく，“$f(x,y)=0$ を $y=\varphi(x)$ に書き直す” ですね.

質問： なめらかな曲線であることがわかると，何の得があるのでしょうか.

お答え： 数学で述べるのは “なめらかな曲線になる” という事実．得かどうかは，数学を使う側（皆さんのこと）が判断することでは?

質問： チェーンルールがいまいちわからないので理論的に教えて下さい.

お答え： いまいち，を正確に記述してください．ちなみに講義ノート 36 ページの命題 5.6 と 40 ページの系 6.2 です.

質問： 実根とおっしゃっていましたが，解とか根とかはどういう概念なのでしょうか.

お答え： 方程式の解，方程式の根という 2 つはほぼ同じ意味で使っているようです．“多項式 x^3-1 の根”，“方程式 $x^3-1=0$ の解” という使い分けをすることがあります.

質問： 問題の解答のとき $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ 証明なしに書いていいのですか? **お答え：**証明が必要なら陽に要求します.

質問： 合成関数の微分などの定理の証明は理解や暗記はしたほうがよいのですか．内容が難しいのですが....

お答え： 定理のステートメントと使い方がきちんと身に付けばよいと思います.

質問： 行列の前についている「rank」「det」はそれぞれ何を表しているのですか．またどういった意味があるのですか.

お答え： 階数，行列式．線形代数で学んだはず．まだだとしても前期のうちには教わる.

質問： ヤコビ行列 (?)，行列の rank のつながりがよくわからなかったため載せていただけないでしょうか.

お答え： 講義ノート pp. 53–54.

質問： 黒板に「2 回ビブン」と書かれましたが 2 階微分と区別しますか. **お答え：**いいえ.

質問： 本日の授業でグラフを表示するのにコンピュータを入れていましたが，自分たちもそういうソフトを入れた方がいいのですか? **お答え：**あると面白いですよ．Maxima や gnuplot などフリーソフトでも十分に遊べる.

質問： 例 8.3 の微分方程式の求め方のプリントはないですか? また，微積分の良い問題集を教えて下さい.

お答え： 前半：難しくないので，一言で：$(\log|f'|)=f''/f'$ を使う．後半：とりあえず，書店や図書館で 10 冊くらい見て下さい．具体的に “これはどうか” という質問には個別に答えることができます．一般的に，米国の演習書は問題が多くて楽しいです．Shaum's Outline Series とか．英語での数学の書き方もわかって一石二鳥です.

質問： 偏微分と合成微分（原文ママ：合成関数の微分のことか）が使えるようになればよいということでしたが，ぶっちゃけテストではどれくらいのことができればよいですか. **お答え：**過去問を見て下さい.

質問： 中間試験は偏微分と合成関数の偏微分を押さえておけば乗り切れますか. **お答え：**押さえ方によります.

質問： この授業の内容はすべて教科書に載っていますか？ **お答え：**大体のっています.

質問： プリントを無くしたのですが,．OCW-i にのっていますか? **お答え：**はい．講義 web ページにもあります.