2013 年 6 月 4 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 8

お知らせ

- 本日，中間試験の予告をいたしました．欠席された方は，web ページ/OCW から情報を入手してください．

前回の補足

前回は，微分方程式の一般論には立ち入らないつもりで，いい加減に，直観的に説明をしたつもりですが，ご質問が複数ありましたので複数いらっしゃいましたので，一応 “よい常微分方程式” に関する基本定理を述べておきます．仮定はこれより弱くすることもできるし，結論を少し強くすることもできますが，実用上はこれで十分かと思います:

定理 (常微分方程式の基本定理)

変数 t, x_1, x_2, ..., x_n の n 個の $(n+1)$-変数関数 $f_j(t;x_1,\dots,x_n)$ $(j=1,\dots,n)$ が，与えられた点 $(t_0;a_1,\dots,a_n)$ を含む $\mathbb{R}^{n+1}$ の領域 D で C^∞-級であるとする[*1]．このとき，十分小さい正の実数 ε と，区間 $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ で定義された n 個の C^∞-級な一変数関数 $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ で

$$\frac{dx_j}{dt}(t)=f_j\bigl(t;x_1(t),\dots,x_n(t)\bigr),\qquad x_j(t_0)=a_0$$

となるものがただひと通りに存在する[*2]．

たとえば，$n=1$，$f(t;x)=\lambda x$ (λ は定数) に対して，これを適用すると，$\dfrac{dx}{dt}=\lambda x$, $x(t_0)=a$ という初期値問題の解がただひとつ存在することが分かります．

また，$n=2$, $f_1(t;x_1,x_2)=x_2$, $f_2(t;x_1,x_2)=-x_1$ とすると，対応する微分方程式の初期値問題は $\dfrac{dx_1}{dt}=x_2$, $\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1$, $x_1(t_0)=a_1$, $x_2(t_0)=a_2$ ということになりますが，ここで $y=x_2$ とおけば，方程式の第 1 式は $x_1=\frac{dy}{dt}$ となるので，与えられた方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-y,\qquad y(t_0)=a_1,\qquad \frac{dy}{dt}(t_0)=a_2$$

と書き換えられます．すなわち，このような 2 階の常微分方程式は，唯一の解をもつわけです．

前回までの訂正

- 黒板に “2 次式の因数分解” を書いたときに $ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$ と書いたようです．右辺の全体に a がかかっていなければなりません．
- 講義資料 7，1 ページ，お知らせの最初：ではは → では
- 講義ノート 49 ページ，下から 4 行目：$F_y(x_0,y_0)\neq 0 \Rightarrow F_x(x_0,y_0)\neq 0$
  ご指摘いただいていましたが別の場所と思っていました．
- 講義ノート 57 ページ，下から 5, 6 行目：$u(t)\to f(t)$.
- 講義ノート 57 ページ，下から 6 行目：$\dfrac{1}{\beta}\Rightarrow\dfrac{\beta}{1-p}$ (講義の際に指摘した)
- 講義ノート 58 ページ，下から 5 行目：前回 → 前々回に
- 講義ノート 62 ページの問題 8-5, 8-6 のように事実だけが述べられた問題は “であることを証明せよ” を補ってください．（少々古い本ではこのような書き方がされていたように思いますが，最近は少ないようです）

[*1] f_j の微分可能性を下げると，それにともなって，保証される解の微分可能性も下がる．
[*2] 解の一意性については少々曖昧なままにしている．

授業に関する御意見

- 先生のレポート拝見しました．先生は東工大生を実験台（実験台はゆとり教育でなれていますが）にして九大に情報を流すスパイだったのですね!!!（コミュ障でない時点で外部の人間かと疑っておけば . . . ）「無理やり」書かれた質問にお答えするのがんばって下さい．
  山田のコメント： そのレポートっていうやつは大体想像がつきますが，九州大学での授業での質問を使っています．山田は 2000 年 4 月から 2009 年 9 月まで九州大学におりましたので，そのときの仕事です．結局どこでも質問のパターンは変わらないですね．ちなみに山田は東京工業大学の卒業生でもありません．というわけで（どういうわけだ）「無理やり」質問を書いて下さい．
- 過去問見ました．チャレンジします． **山田のコメント：** どうぞ．
- “Shaum’s Outline Series” は図書館にありますか? 検索しましたがヒットしませんでした．
  山田のコメント： 申し訳ありません．チェックしていません．McGraw Hill のサイトに情報が載っていますが，購入しても大した額ではありません (USD 10–20 くらい)．
- ラプラシアンを三角っていうと ∇ もあるからまぎらわしいのでは?
  山田のコメント： そうですね．∇ はなんと読むかは大丈夫ですね．“三角” と読むのは，その近辺に書いたものがあるときだけですのでご安心ください．
- 「ポアソン方程式」と「ポアゾン KISS」の前半が似ていますね． **山田のコメント：** 「ポワゾン KISS」ですね．綴りを調べてみましょう．
- 年号の数字の「7」を（山田注：7 の縦棒に斜めの線が交差している）と書いていましたが，カタカナの「ヌ」に見えてしかたないです．
  山田のコメント： Sorry．数字はいろいろな書き方がありますね．国によっても随分違います．
- 黒板の 例 と Example の違いが分かりません．使い分けているのであれば基準を教えていただけると助かります．/Example と例の使い分けがよく分かりません．
  山田のコメント： 使い分けていません．
- よく，高校の時の模試で，わからないけどとりあえず代入したら成り立つ数を答だけかいてました． **山田のコメント：** とりあえず代入したら成り立つ数を見つけるのも難しいかもしれませんね．
- 大学に入ったら自分の好きなことが勉強できるとワクワクしていましたが，全然そんな事はなかった．
  山田のコメント： よくあるケースですね．で，好きなことってなんでしょう．それをあなたが自分で勉強することを誰も妨げない，というのも大学です．
- ラプラスの悪魔が実在したら，世界はどうなってしまうんでしょう． **山田のコメント：** どうでしょう．実在してもその悪魔さんとコンタクトがとれなければ何も起きない？
- 積分の時代きたー **山田のコメント：** きたのか?
- 西暦の話に共感した． **山田のコメント：** ですよね．
- たのしかった． **山田のコメント：** me, too
- 今日はまあまあ分かりやすかった． **山田のコメント：** たいしたことはやっていないからね．
- わかりやすかったです． **山田のコメント：** ほんと?
- 今日は寝なかった．でもわからない． **山田のコメント：** ざんねん
- つゆは嫌いです． **山田のコメント：** 私もです．
- (^q^) **山田のコメント：** :-P
- (__)..zzZZ **山田のコメント：** ;-(

質問と回答

質問： 2 階微分方程式の解き方を，物理の授業では特性方程式の解が虚数であった場合，オイラーの公式を用いて $\cos\theta+\sin\theta$ となる公式を用いていたのを知っていたので（山田注：この式は少し変．オイラーの公式ではないし，一般解の表示でもない）単振動の場合の公式が $A\cos\omega t+B\sin\omega t$ と導けるのは理解できましたが，それを授業で説明せずに教えるのはいささか強引ではないでしょうか．

お答え： 強引ではありません．授業では “解を導く” ことはやっていません．$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ は $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ を満たす，ということをやったのです．これは，三角関数の微分公式さえ知っていればわかります．オイラーの公式も特性方程式も何もしらなくても ok．ところが “よい微分方程式の与えられた初期条件を満たす解はただひとつ” であることを認めると，この形の解が全てである，ということがわかる，ということを説明したわけです．授業の最初にやった 2 次方程式の例はこのための伏線．解の形が分からないときに，どうやって解を導くか，というテクニックはいくつもあって，その一つが指数関数を用いる方法，それ以外にもいくつか方法があります．いずれにしても解が求まってしまえば途中はどうでもよいわけで，解き方の作法にこだわるのは感心しません．

質問： $y''+p_1y'+p_2y=0$ (p_1, p_2 は定数) をとくときにどうして $y=e^{\lambda t}$ とおくという発想がでてくるのですか．

お答え： 後付けの理由は沢山ありますが，“先人の数知れない試行錯誤” です．

質問： 物理の授業で $L(y)=y''+p_1y'|+p_2y=0$ (p_1, p_2: const) において $y(x)=e^{\lambda x}$ とおき，上の式に代入して出た λ の解を λ_1, λ_2 とおくと一般解が $y=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$ になるのはなぜですか．

お答え： まず, 最後の式が $L(y)=0$ を満たすのは単純計算ですぐにわかりますよね．$\lambda_1\neq\lambda_2$ (特性方程式が重根を持たない場合), すべての解がこの形になることは次のように分かります：$y=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[(\lambda_2a-b)e^{\lambda_1x}-(\lambda_1a-b)e^{\lambda_2x}\right]$ とおくと，これは $L(y)=0$ の初期条件 $y(0)=a$, $y'(0)=b$ を満たす解．同じ初期条件を満たす解は他にないから，すべての解はこの形．

質問： どうして 2 階微分を含む微分方程式の初期条件は $x(t_0)$ と $\frac{dx}{dt}(t_0)$ で決まるのですか．

お答え： この講義資料の「前回の補足」参照．

質問： 授業の考え方から「n 階の微分方程式は n コの初期条件で関数が定まる」といってよいのでしょうか（n コの初期条件とはあまりにアバウトな気もしますが)．

お答え： アバウトに言ってそう（授業もアバウトでした)．「前回の補足」の真似をして正確に述べてみよう．

質問： 常微分方程式の初期条件は n 階のものなら n 個必要なのでしょうか．また (8.4) の式では $x(t_0)$ と $\frac{dx}{dt}(t_0)$ を初期条件として使っていましたが，$\frac{d^2x}{dt}(t_0)$ と $x(t_0)$ といったように他の組み合わせでも問題として成立しますか．

お答え： 前半：前の質問と回答参照．後半：うまくいくときもありますが，この組み合わせでは解が一つに定まらない場合や存在しない場合がありえます：たとえば単振動の方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$ では $x(t_0)=a$ とすると $\frac{d^2x}{dt^2}(t_0)$ は $-ka$ とならざるを得ないので，自由に初期条件を決めるわけにはいきません．また，$x(t_0)=a$, $\frac{d^2x}{dt^2}(t_0)=-ka$ という条件を設定すれば解は存在しますが，ひと通りではありません．

質問：「よい常微分方程式のあたえられた初期条件をみたす解は 1 つ」とありましたが，ここでいう「よい常微分方程式」とはどのようなものを指しますか．　**お答え：**「前回の補足」に挙げた定理の仮定を満たす方程式．

質問： 先生の「よい常微分...」の定理は，常微分方程式の一般解もひとつということですか? いつも一般解がふたつあるのではと勘ぐっているのですが.

お答え：「一般解」という語が何を指しているかが曖昧ですが（そしてその定義は難しいですが），この文脈で一般解とは，微分方程式（初期条件は考えない）をみたす関数すべてのことを呼ぶようです．たとえば，定数 λ に対して，方程式 $\frac{dx}{dt}=\lambda x$ の一般解は $x(t)=A\exp\lambda t$ (A は定数) です．さまざまな定数 A の値に対して一つひとつが方程式の解ですから，一般解は無限個の関数の集まりとなります．“ただひとつ” の意味は，与えられた初期条件を満たす解が唯一ということ.

質問： $\frac{dx}{dt}=\lambda x$, $x(t_0)=\alpha$ について，$\frac{1}{x}dx=\lambda\,dt$ より $\log|x|=\lambda t+C$, $x=e^{\lambda t+C}$．$x(t_0)=\alpha$ より $e^C=\alpha$. $x=\alpha e^{\alpha t}$ ではいけませんか?

お答え： まず，答は $x=\alpha\,e^{\lambda(t-t_0)}$．途中で e の肩にのっている λ が α に変わっています．それからいつのまにか t_0 は 0 になってしまっています．うるさいことを言いますと $\frac{1}{x}$ とした時点で $x=0$ の場合が除外されています．また log をはずすときに絶対値がいつのまにかはずれています．こういうふうに “あなだらけ” な計算ではありますが，なんとか（いい加減にやって）答が見つかってしまえば，一般論（よい常微分方程式の与えらた初期条件を満たす解はただひとつ）に押し付ければ，それが答，ということなんです．いけませんか？というよりも，答が正しく求まればよいです（今回のご質問のように答えが違っていてはだめ).

ちなみに $\frac{dx}{dt}=\lambda x$ を満たす x は $x(t)=A\exp(\lambda t)$ の形である，という事実は，工学部の学生は “常識として” 知っていなければいけません.

質問： $x=x(t)$, $\frac{dx}{dt}=kx$, $x(t_0)=a$ (k, a は定数）としたとき，よくない常微分方程式の例にはどのような式がありますか.

お答え： こうしてしまったら，これはよい微分方程式です.

質問： 解が 1 つに決まらない微分方程式ってあるんですかね?

お答え： 次のような微分方程式を考えましょう：

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt[3]{x^2},\qquad x(0)=0.$$

定数関数 $x(t)=0$ はこの方程式を満たしますが，任意の負でない数 a に対して

$$x(t)=\begin{cases}0 & (t\leqq a)\\ \frac{1}{27}(t-a)^3 & \end{cases}$$

とおくと，これも与えられた方程式を（初期条件も含めて）満たします．すなわち，初期条件を満たす解が無限個存在します．なお，この微分方程式は，この講義資料の「前回の補足」の意味でよい微分方程式ではないことに注意しましょう.

質問： 針金の熱伝導のところにでてくる「基本解」は「解」と同じものですか，違うものですか?

お答え： 特別な性質（ここでは面倒臭いので述べない）を満たす解です．；

質問： $\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たす方程式（原文ママ：関数のことか）で授業では $u_0(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\exp(-\frac{x^2}{4ct})$ がこれをみたすと言っていましたが，他に満たす方程式（山田注：関数のこと？）はあるのでしょうか？また，その方程式はどうやって導かれたのでしょうか?

お答え： たとえば講義ノート 60 ページ，式 (8.9)．導かれた，というよりこのように書かれた事自体が大成果だったわけです.

質問： どのような事象が確率変数の具体例として挙げることができますか.

質問： 確率変数とは何ですか.

お答え： 高等学校の数学 B（新学習指導要領），数学 C（旧学習指導要領）を見てご覧なさい．後日，時間があったら説明します.

質問： 確率変数が正規分布に従うとはどういうことですか．$P\{X\leqq c\}=\int\ldots dx$ (山田注：途中を略した) という式が何を表しているのかわかりませんでした.

お答え： 確率変数 X の値が c 以下であるような確率は，右辺の積分で表されるということ，ですが，後日，時間があったら説明します.

質問： 今回の講義であつかわなかった微分方程式にはたとえばどのようなものがありますか.

お答え： たいていの方程式は扱っていません．常微分方程式では人口論などで有名なロジスティック方程式とか，生態系の理論で有名なヴォルテラ・ロトカの方程式とか；偏微分方程式では，量子力学で現れるシュレジンガー方程式とか，非線形波動を表す KdV 方程式とか，一般相対性理論で現れる重力場の方程式とか，流体の運動を記述するナビア・ストークスの方程式とか．まだまだたくさん有用な微分方程式があります．ちょっと前に流行った“渋滞論”も，もともとのモデルは微分方程式（バーガーズ方程式）でしたよね（それを離散化する）.

質問： 微分方程式が最も利用されている分野は力学でしょうか.

お答え： 数えてみたことがないのでわかりません．科学と名のつく分野で微分方程式とからんでいないものの方が稀と思いますが.

質問： 微分方程式は基本的に物理から来ているんですか?

お答え： いいえ．全然“基本的に”でないです．さまざまな業界に微分方程式は住んでいます.

質問： 世界のほとんどは微分方程式で書けると昔の人が言っていたとおっしゃりましたが，今現在，微分方程式が通用しない自然現像（原文ママ：自然現象のこと？）はあるのですか？

お答え： 自然現象っていうものは究極的には離散的なものでは?

質問： ラプラスの悪魔は現象が全て微分方程式で表せるとしたとき，全てを見通すことができるもののことですよね？現象に介入したりするものなのでしょうか？

お答え： あったことがないのでわかりませんが，介入はしないという気分だと思います．積極的に介入するのはマックスウェルの悪魔.

質問： ラプラスの悪魔について，なぜ初期条件や微分方程式がわかると，今のことだけでなく未来のことまでも予測できるのでしょうか?

お答え： 今のことだけなら初期条件だけがわかればよいですね．その条件のもとで微分方程式をとくことにより，未来の挙動がわかるのです.

質問： 教科書だと関数が「函数」として表記されていますが，どちらが cool ですか.

お答え： 最初の時間（4 月 9 日）に背景を説明した．その上でどちらが cool かを判断してください．主観の問題です.

質問： 調和関数ってどうして名前がついてるんですか? ありがたい関数なんですか?

お答え： Harmonic function の訳語．その語源を調べてみよ．後半：ありがたいです.

質問： 講義資料 7 の 2 ページの下から 4 行目「$x \mapsto y$ は 1 対 1 対応ではない」となりますが（山田注：とありますが？），$y \mapsto x$ ではないのですか.

お答え： ちがいます．1 対 1 対応とは何でしょうか.

質問： fix って何ですか.

お答え： 固定する（動詞）

質問： 三変数関数以上の関数に陰関数は存在しますか.

お答え： 講義ノート 50 ページの定理 7.3.

質問： $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ になったのがよくわからなかったです.

お答え： 5 月 14 日の講義，講義ノート 43 ページあたり.

質問： 微分方程式の段階に入ってラプラス関数が重要な役割を持ち始め，いろいろな現象の方程式に入ってくるのですが，これには何か理由があるのですか?

お答え： ラプラス関数って何ですか? 授業では出て来なかったと思いますが.

質問： $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ の Δ は毎回設定するのですか? Δ は覚えなくてもいいんですよね.

お答え： 前半：この文脈での“設定”という語の意味がわかりません．後半：Δ の何を覚えるということでしょうか.

質問： C^2-級関数 $f(x,y)$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として (r,θ) の関数とみなしたとき，$\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ が成り立ちますが，これは公式として断りなく用いてもよいでしょうか.

お答え： もちろん．断りなく使える程度に覚えていないと不便．試験などで証明を要求するときは，そのことを明記します.

質問： $u(x,y) = F\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)$ の形にかける調和関数について，一般解が $F(r) = a + b\log r$ になる過程がわからなかったので，もう一度黒板に示していただけませんか?

お答え： 黒板に示すまでもなく簡単です：$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r)$ は θ に依存しないので，ラプラシアンの極座標表示の式から，$\Delta u = F'' + \frac{1}{r}F'$．とくに，$F(r) = a + b\log r$ は $F'' + \frac{1}{r}F' = 0$ を満たし，さらに初期条件 $F(1) = a$, $F'(1) = b$ を満たしている．したがって（良い微分方程式は与えられた初期条件に対して解が唯一であ

ることを認めれば）これが一般解になる．なお，この形の解が“気合”で見つけられない場合は $F'' + \frac{1}{r}F' = 0$ を（分母が 0 になる場合はあとで考えることにして，気にせず）$\frac{F''}{F'} = -\frac{1}{r}$ と書き直し，（$F' < 0$ の場合もあまり気にしないで）$(\log F') = \frac{F''}{F'}$ に気をつければよい．任意の初期条件をみたすような解がうまくみつかれば，途中経過は忘れても ok.

質問： 微分積分学を独学するのに適した参考書を教えて下さい.

お答え： 目的によります．数学的にきちんと学びたいのか，工学への応用を手短かに知りたいのか，それとも試験をクリアしたいのか．それにより“適した”の意味が違ってきます．また，“あなたの目的”をあなたが正確に述べているとは限らない，そういう具体例をたくさん見てきました．したがって，こちらがアドヴァイスするより，あなた自身が図書館や書店にいって 20〜30 冊くらいの本を眺めてみるのが効率的だと思います.

質問： 何かよい微分方程式の参考書はないですか？

お答え： 上の質問と回答参照．工学系なら“Advanced Engeneering Mathematics”といったフレーズで検索してみましょう.

質問： 3 階線形微分方程式にも決まった解き方があるのですか?

お答え： 2 階線形微分方程式には決まった解き方がありますか? (ひょっとしたら，あなたと使っている言葉が違うかもしれない．3 階線形定数係数同次微分方程式なら“決まった解き方”らしきものはあります).

質問： 式 (8.5) のように 2 回微分を含む微分方程式はとけるのですか.

お答え： 解いたのが下の式（ただし，配布した資料では $f(t)$ ではなく $u(t)$ となっていました).

質問： 微分方程式の解き方は教えてくれないのですか.

お答え： 多岐に渡るのでこの授業では扱いません．さまざまな場面（力学や電気回路や量子力学や...）で教わるはずです.

質問： 偏微分方程式は変数が沢山あるのでどうやってとくのかよく分からなかった.

お答え： “どうやってとく”という一般的な話は講義では一切しませんでした．したがって，よくわからないのはあたりまえです.

質問： 微分方程式が教科書にのってないんですが，どのように勉強したらよいのでしょうか.

お答え： 今回はこんな例がある，という話だけです．さまざまな科目ででてくるのでその時にきちんと勉強しましょう.

質問： Mathematica には微分方程式を数値的にも記号的にも解いてくれる機能があるそうです．ひらめき力のないコンピュータが気合で解を m につけることは実質不可能だと思えますが,「与えられた微分方程式の記号解を見つけるアルゴリズム」が存在するのでしょうか？

お答え： 一般的には存在しません．微分方程式の解がどの範囲の関数で表されるか，ということ自体が一般には自明ではありません.

質問： 微分方程式は解き方を暗記しなければ解けない気がします．やはり経験値なのでしょうか.

お答え： それもあります．“解き方を暗記する”というと貧乏臭く思えますが“先人の知恵を利用する”というと少し格好良いね.

質問： 微分方程式の解き方って $\frac{dv}{dt}$ とかを分数のように扱って積分して出せばいいのでしょうか.

お答え： 言っている意味が分かりませんが，講義ノートの例はおっしゃっている方法で解けますか（試しましたか)．とけるのならそれでよいのだし，解けないならそうではないのです.

質問： 熱化学方程式や波動方程式は覚えなければいけない重要な公式ですか?

お答え： 第 1 のものは講義では扱っていませんね．講義で扱ったのは“熱方程式”あるいは“熱伝導方程式”と呼ばれるもの．“似たような名前のものは同じ”というセンスは関心しません．ちなみに，これらの方程式は理工系の常識と思います.

質問： なぜ $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ なのですか? （原文ママ；極限の式の右側に何か等号で結ばれるものがあるべきな気がするが，書いてない）危険なかんじがする.

お答え： 意味がわかりません.

質問： 微分方程式は予測が立たないとオシマイということがありますか.

お答え： 意味がわかりません．“予測”という語をどういう意味でつかっていますか?“オシマイ”とはどういう意味ですか?

質問： 常微分方程式だととっつきにくく思えるのに ODE というととっつきやすい感じがしますよね.

お答え： そう？ 中央情報局より CIA の方がとっつきやすい？（かもしれない）

質問： $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 1$ (原文ママ：分母は $\sqrt{\pi}$ のはず) がさっぱりわかりません．やはり高校までの知識では無理ですか? 置換とかしたいですが，$x^2 = u$ として部分積分でいけますか?

お答え： いけるようだったら "前期の最後で紹介する" なんてもったいぶりません．

質問： 問題 8-2，初期条件 (8-4) を満たす解は $x(t) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(\omega t+\theta)$, where $\alpha = x_0\cos\omega t_0 - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t_0$, $\beta = x_0\sin\omega t_0 + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t_0$, $\theta = \sin^{-1}\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ で合っていますか?

お答え： たぶん合っていると思いますが（$\sin^{-1}$ などの値域に要注意），一般解が $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ の形をしているのだから，$x_0 = a\cos\omega t_0 + b\sin\omega t_0$, $v_0 = -\omega a\sin\omega t_0 + \omega b\cos\omega t_0$ を a, b についてとく方がきれいだと思います：

$$x = \left(x_0\cos\omega t_0 - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t_0\right)\cos\omega t + \left(x_0\sin\omega t_0 + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t_0\right)\cos\omega t.$$

質問： プリントの 8-2 の「初期条件をみたす解」が求められません．$x(t_0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}(t_0) = v_0$ から $\alpha\cos(\omega t_0) + \beta\sin(\omega t_0) = x_0$, $-\alpha\omega\sin(\omega t_0) + \beta\omega\cos(\omega t_0) = v_0$ という式が出ましたが，そこからどう進めばよいでしょうか．

お答え： この 2 本の式を α と β に関する連立一次方程式と思って解く．