2013 年 6 月 11 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 9

お知らせ

- 来週 6 月 18 日は中間試験を行います．詳細は講義 web ページまたは OCW をご覧ください．
- 6 月 25 日は，5 類に対応する学科の先生方の特別講義を行います．ご出席ください：
  - 廣川 二郎 先生（電気電子工学専攻）「アンテナと微分積分学」
  - 府川 和彦 先生（通信情報工学専攻）「無線通信への微分積分学の応用」
- 今回は提出物の受付を中止いたします．

前回の補足

積分の値が“求まる”という語を不用意に使いすぎたようです．値が求まる，とはどういうことでしょう．

(1) 一つ値が定まるとわかることを“求まる”ということがあります．例えば定数 $e \in (0,1)$ に対して $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$ の値は唯一に決まりうる（定理 9.4 より連続関数は積分可能）ので，値は求まった，としてよい．

(2) 知っている数（有理数，自然数の平方根，円周率や自然対数の底など）から知っている操作（例えば初等関数に代入）で得られる数で表せれば求まったと思う．例えば，$\int_0^1 \cos x\,dx = \sin 1$ で“求まった”とするのがこの立場．どんな“知っている数”や“操作”を許すかによって，求まるという意味が違ってきます．例えば $E(e) := \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$ $(0<e<1)$ は**第 2 種完全楕円積分**とよばれる由緒正しい関数で，その性質は 19 世紀から調べられ，数表もあります．高等学校で習わないだけ．これを“知っている関数”と思うなら (1) の例はこの立場でも求まったということになります．

(3) 数値を必要な精度で求める手段が与えられるとき求まった，という立場，これが最も実務的（工学的）な求まり方でしょう．この場合 (2) の $\sin 1$ は求まったうちに入りません．数値を求める手段が必要（その原理は後期に扱います）．実際には電卓などのブラックボックスに入れれば値がわかるので，求まったと言えるかもしれません．楕円の弧長は楕円積分で表されますが，問題 9-2 のように近似値を計算できるので，ある意味で求まったとしてよいのかも知れません．

前回までの訂正

- 中間試験予告（日程）: 2012 年 6 月 18 日 ⇒ 2013 年 6 月 13 日．
- 楕円 $(a\cos t, b\sin t)$ の弧長の計算で cos と sin が逆になっていました．また，最後の式（楕円積分）の中の $\sin t$ の 2 乗が抜けていたようです：正しくは，$\underline{b>a \text{ のとき}}$ 弧長 L は
$$L = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = 4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt \qquad \left(e=\sqrt{(b^2-a^2)/b^2}\right)$$
一方，$a<b$ のときは，置換 $u = \frac{\pi}{2}-t$ を行えば
$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 u}\,du \qquad \left(e=\sqrt{(a^2-b^2)/a^2}\right).$$
- 黒板に書かれた式：$\displaystyle\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\,dt \Rightarrow \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$．“積分記号と dt ではさまえれた部分はひとまとまり”と思えば括弧がなくても意味が明確ですが，括弧はつけたほうがよいですね．
- $\frac{1}{1-x^3}$ の部分分数分解をする部分で，$1-x$ というべきところを口頭で「いちひくさん」といったようです．
- 黒板に描いた積分の定義の概念図のうち $y=f(x)$ が $y=f(x$ となっていたそうです．
- 「途中の積分の「du」が抜けていた」（原文ママ）というご指摘がありましたがどこでしょう．
- “$\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \cos^{-1} x$ ではなく $\sin^{-1} x$ の間違い” というご指摘がありましたが，黒板には $\cosh^{-1}$ と書いていまして，途中で $\sinh^{-1}$ と書きなおしたはずです．断じて $\cos^{-1}$ や $\sin^{-1}$ ではありません．

授業に関する御意見

- 最近，下に何を書くかばかり考えて微積に身が入りません．先生のコメントが面白くて． **山田のコメント：** いけませんねぇ．
- 授業中学生が眠っていると激おこですか? **山田のコメント：** いいえ，ぷんぷん丸にはなりません．たまに，そっと後ろから近づいて「わ」と言ってみたりします．面白いです．
- \(^o^)/ オワタ **山田のコメント：** 何が?
- 今回は割とわかった/今日の授業はよく理解できた． **山田のコメント：** ほんと?
- 分かったつもりにもなれないかもしれません． **山田のコメント：** こまったね．
- 留年したくない．/テストがんばりたい． **山田のコメント：** どうぞ．
- これからむずかしくなるような気がして不安です． **山田のコメント：** 難しくなります．
- 先生:「計算って楽しいよね」$\longleftarrow$ 途中計算がミスっていた時の絶望感がひどいです． **山田のコメント：** そうかもしれませんね．
- テストの自作カンペで出ないとこを書いてもあわれまないでください．笑ってください．あと，質問が積分に関係なくてすいません．
  山田のコメント： はい，笑います/いいえ．
- 教室の前にブラックコーヒーを置くというのはいかがでしょう．代金は先生と僕たちが半々に負担ということで．
  山田のコメント： 一応，この教室は飲食禁止．多少は目をつぶりますが，堂々とやるのはいかがなものかと．
- 先生ニコニコしすぎですね． **山田のコメント：** きもちわるい?
- $\mho$ (mho) って Ω^{-1} として扱うんでしょうか．ムォー． **山田のコメント：** そうです．モーですね．
- 絶対に私の名前を間違えないでください．お願いします． / Challenge 失敗! -25 点してしまったか. . . / ジーメンスは第 1 級アマチュア無線技士の問題集にアドミタンスの単位として載っていましたが，こんなところで聞くとは思わなかったです． **山田のコメント：** 間違えません．多分． /え?/世の中いろいろなことがあります．
- ∇ atled は delta の逆というギャグですか? それとも mho のように使われている言葉ですか?
  山田のコメント： ギャグですが，一部使っている人がいるようです．
- つゆじゃないんですかねぇ. . . **山田のコメント：** ねぇ

質問と回答

質問： $(\sinh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ですが，計算が間違っていなければ $\cosh^{-1}x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$ で，$(\cosh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ となりました（山田注：正しいです）．$(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\cos^{-1}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ と少し似てる気がします．何か関係はありますか?

お答え： 逆三角関数の微分公式を導くには，微分公式 $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ の他に恒等式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いました．逆双曲線関数の場合も類似の公式 $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つので，類似の微分公式が成り立つことになります．

質問： 積分のときに $\big|_0^{1/\sqrt{2}}$ という表現を初めて見たのですが，基本的にそういうルールなのですか．

お答え： 高等学校の教科書の多くでは $[F(x)]_a^b$ と書くようですね．これを $F(x)|_a^b$ や $F(x)|_{x=a}^{x=b}$ と書くこともあります．どちらの記号もよく使われます．

質問： $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ と決まっているので，分割 $\varDelta$ の幅の定義の中の絶対値は必要なのですか?

お答え： 確かに不要ですね．習慣的につけていますが．

質問： $\overline{S}_\varDelta$, $\underline{S}_\varDelta$ とは $\varDelta$ の要素の中の最大と最小ということか． **お答え：** いいえ，講義ノートの (9.1) 式です．

質問： 積分する時，幅を 0 に近ずける（山田注：近づける?）って，どのくらい近づければ（山田注：こちらは正しい）よいのでしょうか? **お答え：** 極限をとるので，いくらでも 0 に近づけなければいけません．

質問： 不定積分 $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt$ で正しいですか． **お答え：** 正しいが，定数の差を無視するので，多少曖昧．

質問： $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ を定積分の定義にすると良くない理由は，原始関数が無数にあることと，原始関数の存在証明がなされていないことの 2 つと考えていいのですか? **お答え：** よいと思います．

質問： 高校までの積分の定義 F はマズい（原文ママ：“積分の定義 F” はどういう意味か?）という理由の中に，F が無数に存在しうるというのがありましたが，1 つに定めなければ定義とはいえないということですか．

お答え： もし，原始関数（のことですよね，質問のどこにも書いていませんが）のとり方により答が違ってしまったら，定義できたことになっていません．この場合は，実はどの原始関数をもってきても同じ値になるので問題はないのですが “問題がない” ことを示す必要があります．講義ノートの 68 ページの上の方の議論が必要となるわけです．

質問： 1 変数関数に関しては，微分と積分は互いに逆演算ですが，多変数関数に関しても，偏微分や全微分の逆演算となるような積分があるのですか． **お答え：** 一般にはありません．次回コメントします．

質問： 初等関数の定義があまりよくわかりません． **お答え：** 講義ノート 28 ページ．

質問： 初等関数でない関数の具体例を教えて下さい．

お答え： 定数 $e \in (0,1)$ に対して $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$．それから $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

質問： 原始関数は初等関数で表せないが存在するということは，具体的はどのように表す? のでしょうか．新しい数式記号ですか?

お答え： 例えば $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$ は表せたことになる．もちろん，定理 9.4 を認めた上でですが．

質問： 原始関数が初等関数で表せるか否か判断する方法はありますか? **お答え：** 一般論はありません．

質問： 初等関数で表せない原始関数が出現する積分計算はて計算で行えますか? **お答え：** 何を求めたいかによります．

質問： 初等関数で表せない，積分関数の値を求めるのに例として $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めるのにアイデアが必要とおっ

しゃっていましたが，それは関数ごとに違うのでしょうか．面倒でも万能な手段とかありませんか？

お答え： 「積分関数の値」とは何でしょう．ここで例として挙げられているのは関数ではなく 1 個の数ですね．で，ありません．“求まる” とはどういう意味かによりますが，求まる保証もありません．

質問： 原始関数が存在しないということはあるのですか? **お答え：**例 9.2 の f には原始関数が存在しない．

質問： 積分不可能な関数って存在するのですか． **お答え：**例 9.2

質問： 不連続で積分可能な関数の例を教えて下さい． **お答え：**例 9.3

質問： 全ての連続関数は積分可能ですか． **お答え：**定理 9.4

質問： 「積分不可能である $\Rightarrow$ 連続でない」は成立するでしょうか.（以下略） **お答え：**定理 9.4 の対偶なので成立.

質問： 「第 2 種楕円積分」というものがありましたが，第 1 種楕円積分もあるのでしょうか．あるとしたらどんなものでしょうか．できれば私たちが理解できると思う範囲で説明をお願いします． **お答え：**$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-e^2\sin^2 t}}$ $e \in (0,1)$.

質問： 楕円 $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$ $(-\pi < t \leqq \pi,\ a > b)$ の周の長さの計算で，$\sqrt{1-e^2\sin^2 t}$ の原始関数を初等関数で表すことができないとき，ほかに $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ の値を求める方法はありますか?

お答え： この講義資料の「前回の補足」参照.

質問： 積分できない関数を判別する方法はありますか?

お答え： “積分できない” は “積分可能でない” という意味でしょうか．連続ならば積分可能（定理 9.4）ですので，“簡単な式” で表されていれば積分可能．連続でない場合，一般論として判別する方法はないと思います.

質問： 微積分の基本定理が分かるまでは微分と積分は別演算だと思われていたのでしょうか．それとも定理は当然? でしょうか．昔の人はどう捉えていたのかも分かりません.

お答え： 小さい部分の面積や体積の総和をとることによって，錐や球の体積を求めることは，すでにギリシア時代になされていました．錐の体積が，同じ底面と高さをもつ柱の体積の 1/3 であることは 2000 年以上も前の人類が知っていたことになります（このことの理由は高等学校の微積分で習いますね）．微積分の基本定理はこのような計算が “微分の逆演算” を用いて簡単にできることを主張していますが，この事実は比較的新しい “ハイテクノロジー” で，ニュートンやライプニッツによるようです．すなわち 17 世紀．いずれにせよ，微積分って古くさいですね.

質問： 離心率を言葉でどう定義するのですか?

お答え： 平面上に直線 l と l 上にない点 A，それから正の定数 e が与えられたとする．このとき，“点 A との距離と直線 l との距離の比が $e:1$ であるような平面上の点の軌跡” は (1) $0<e<1$ のときは楕円，(2) $e=1$ のときは放物線，(3) $e>1$ のときは双曲線となります（適当に座標をとれば簡単に示すことができる）．これにより 2 次曲線に統一的な解釈を与えることができます（高等学校で習ったかもしれない）．この e を 2 次曲線の離心率といいます．とくに $0<e<1$ のときは，授業で与えた楕円の離心率と一致します（確かめよ）.

質問： $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ で表されるときにこの曲線の長さ $(a \leqq t \leqq b)$ が $\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ となる理由を教えて下さい.

お答え： 直観的な説明：みちのり = はやさ × 時間．γ が平面上の点の運動を表す，すなわち時刻 t における点の位置が $\gamma(t)$ で与えられているとする．このとき，時刻 t から短い時間 Δt 経過する間の点の速度は $\dot\gamma(t) = \bigl(\dot x(t), \dot y(t)\bigr)$ $(\doteqdot d/dt)$ で “ほぼ一定” とみなせる．速さは $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{(\dot x(t))^2+(\dot y(t))^2}$ なので，時刻 t から $t+\Delta t$ の時間に点が動いた道のりは，およそ $|\dot\gamma(t)|\,\Delta t$ となる．時間 $a \leqq t \leqq b$ を細かく分割して，このような道のりの総和をとり，分割の幅をどんどん小さくしていくと，結論の式が得られる（工学的にはこういう理解がもっとも重要）.
少しちゃんとした説明：命題 9.9 を用いる．いま，区間 $a \leqq t \leqq b$ で $\dot x > 0$ であるとする．このとき $x(t)$ は区間 $[a,b]$ で定義された単調増加関数だから，その逆関数 $[A,B] \ni x \mapsto t = t(x) \in [a,b]$ が存在する．ただし $A = x(a)$, $B = x(b)$．これを用いて $f(x) := y\bigl(t(x)\bigr)$ とおくと，与えられた曲線は，グラフ $y = f(x)$ $(A \leqq x \leqq B)$ だから，命題 9.9 よりその長さは

$$\int_A^B\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2}\,dx = \int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}f\bigl(x(t)\bigr)\right)^2}\,\frac{dx}{dt}(t)\,dt = \int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy/dt(t)}{dx/dt(t)}\right)^2}\,\frac{dx}{dt}(t)\,dt$$

となるので，$dx/dt > 0$ に注意すれば結論が得られる．ここで置換 $x = x(t)$ と逆関数の微分公式を用いた．一般の場合は $\dot x > 0$ の区間，$\dot x < 0$ の区間などに分割して考えれば良い.

質問： 今さらで申し訳ないですが，チェインルールに関して質問です．例えば $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ としたときに $\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$ が成立しますが，これは a, θ が独立した二変数 x, y によって決まるからでしょうか? そうすると，x は独立した a, θ から決まるから，$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$ や，$a = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta}$ と表せるから，$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial a}$, $\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial a}$, ということも成立するのでしょうか?

お答え： 最初の問：そうです．二番目：講義ノート 45 ページあたり．三番目：第 1 の式は f を x と θ の関数と見なすならそうす．第 2 の式は f を y, θ の関数とみなす．たとえば $f(x,y)=x^2+y$ とするとき，これを a,θ の関数と見なすならば，$f=a^2\cos^2\theta+a\sin\theta$ なので $\frac{\partial f}{\partial a}=2a\cos^2\theta+a\sin\theta$．一方，$f$ を x,θ の関数と見なすなら，$f(x,\theta)=x^2+x\tan\theta$（実際，$y=x\tan\theta$）．このとき質問の式が正しいことを確かめなさい．

質問： $f(x,y)$ について $x=x(s)$, $y=y(s)$，$s=s(t)$ のときは $\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}$ が成り立ちますか．

お答え： 左辺は $\frac{df}{dt}$ の方がよいと思います．すると $\frac{df}{dt}=\frac{df}{ds}\frac{ds}{dt}$ は高等学校で習った合成関数の微分公式．右辺の最初の因子に chain rule を適用すれば，結論はすぐにわかりますね．

質問： ずっと前に「どんな関数でも微分できる」とは聞いたことはあるが，逆に「どんな関数でも積分ができる」というのがなんで成り立たないのか．

お答え： 講義で微分可能でない関数の例を挙げましたが，それは無視？ちなみに「逆に」という語の使い方が誤り．

質問： 「積分」という日本語は積分というものの本質を適格にとらえていまよね（原文ママ）．

お答え： 適格ではなく適確または的確ではないでしょうか．

質問： 例えば $\frac{1}{1-x^3}=\frac{a}{*}+\frac{b}{*}$ の形に速く変える方法がありますか．それとも頑張るしかありませんか．

お答え： 黒板で紹介した計算は十分はやいと思いますが．

質問： 黒板に "$(\tan\frac{x}{2})'dx=dt$" とあったのですが，プライムがついて dx もつくというのは分かりません．

お答え： $\frac{dt}{dx}=\left(\tan\frac{x}{2}\right)'$ のことです．

質問： 今回の授業内容は高校で習ったものゆえ，分からない内容は（自分が知覚している範囲では）無かったため気になった点を聞きます．「それ以上でも以下でもない」集合は空集合だ，という話がありましたが，「未満」と対をなす言葉，すなわち「a よりも大きい」を表す 2 字熟語ってありますか?

お答え： 知らないのです（回答募集）．"a を越える" という言い方はしますね．

質問： 例 9.3 にある「番号 $k=k(\Delta)$ を $0\in[x_{k-1},x_k]$ となるようにとる」について，「番号 k を $0\in[x_{k-1},x_k]$ となるようにとる」では間違いになりますか?

お答え： 間違いではありません．分割 Δ を決める毎に k が決まることを強調するためにこの記法を用いました．

質問： 楕円の導出が途中でまちがっていたのですが最終的な答えは会っていましたか?（原文パパ）

お答え： と書かれてしまいましたので文中に "原文ママ" が書けなくなってしまいました．"楕円の導出" でなくて "楕円の弧長の導出"，"会って" ではなく "合って" ですよね（確信犯?）回答は，この講義資料の訂正の項．

質問： 例えば，"$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ が領域 $D\in\mathbb{R}^2$ (原文ママ：$D\subset\mathbb{R}^2$ の誤り) で連続ならば $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ である" のような抽象的 (?) な定理の証明は，できるようにしておいたほうがよいのでしょうか．（よい，というのは将来携わるであろう理工学の現場で使う機会があるかという意味で）

お答え： 機会があるか，という問に答えるのは難しいです．ない，と断言ができないから．一般的には，証明を知っている必要はないとは思います．それより (1) 事実としてこれが成り立つこと (2) 実は証明が必要な非自明な事実ということ，の 2 点は知らなければなりません．(2) を押さえておけば，証明が必要なときに本を見ることができます．

質問： $\displaystyle\lim_{b\to+\infty,a\to-\infty}\int_a^b e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ (山田注：等号の下に "定義" とある) といっていましたが，それはつまり関数についてその積分の値を一つ一つ覚えていなくてはいけないんですか?

お答え： 定義ではない．定理と言ったはず．これは証明が必要な（そして証明が自明でない）事実．このことから "つまり" 以下が結論される理由がわからないのですが，"積分の値は簡単に表せた" ということだけは覚えるべきです．

質問： 確率密度関数の形はとても美しいと思いますが，先生はどう思いますか．また 1 番美しいと思うグラフは何ですか． **お答え：**"正規分布の" 確率密度関数ね．"美しい" は個人的な概念で（定義はない）恥ずかしいので，勘弁．

質問： 積分をうまくなるには練習しかないのですか? **お答え：**そうだと思います．

質問： 問題 9-3（略）$L=\frac{1}{2}a\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{4}\log(2a+\sqrt{1+4a^2})$ と導きましたが，正しいですか? **お答え：**正しい．

質問： 数学が得意な友人を持ち込めない関係で，私の友人の一人が中間試験を受けられません．どうすればいいですか．

お答え： あなたがお友達を持ち込めないという意味ですか，お友達が自分自身を持ち込めないという意味でしょうか．

質問： 数学が得意な友人などの生き物は持ち込み禁止ですが，数学が得意な自分は入れますか．

お答え： もちろん，そういうものが存在するなら入れます．

質問： 積分もテスト範囲に入っているということは，1 問は出るってことですよね．

お答え： ロジックがおかしくないですか? 出題されてもおかしくない，と言っているだけです．

質問： 質問用紙は何点分になりますか? **お答え：**1 枚 3 点分だが，どういう意図でしょう．4 月の講義概要参照．

質問： われわれはどこから来たのか，われわれは何者か，われわれはどこに行くのでしょうか． **お答え：**さぁ