微分積分学第一 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 解答用紙の裏面・余白は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．**持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**．問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し，正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 7 月 2 日の授業開始前および終了後に返却いたします．それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** に預けますのでそちらで受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は，7 月 2 日の授業終了後に申し出て頂くか，7 月 9 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい．なお，管理の都合上，上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{11}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [40 点]

$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$F(x,y)=x^3+3xy+y^3-5$$

の偏導関数をすべて求めると $\boxed{1}$ である．

時刻 $t=0$ で点 $P=(1,1)$ を通る直線（運動）

$$(*)\qquad \bigl(x(t),y(t)\bigr)=(1+at,1+bt)\qquad \bigl(a,\ b \text{ は定数で } (a,b)\neq(0,0)\bigr)$$

に対して $f(t):=F\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ とおくと，$f(t)$ の $t=0$ における微分係数は $\boxed{2}$ と a, b を用いて表される．特に，位置 (x,y) における標高が $F(x,y)$ で表されるような地形を直線 $(*)$ にそって歩く人が，点 P を通過したときに坂を登っているのは a,b が条件 $\boxed{3}$ を満たしているときである．

次に，集合

$$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)=0\},$$

すなわち関数 $F(x,y)$ の高さ 0 の等高線を考える．この図形は，C^∞-級の関数 g のグラフ $y=g(x)$ と表すことができ,（ということは既知として用いて良い）とくに $g(1)=\boxed{4}$ である．このとき，g の導関数と 2 次導関数は

$$y'=g'(x)=\boxed{5},\qquad y''=g''(x)=\boxed{6}$$

のように x と y の有理式（多項式の商の形）で表される．とくに $g'(1)=\boxed{7}$, $g''(1)=\boxed{8}$ と具体的に値が求まる．さらに $\boxed{5}=0$ と $F(x,y)=0$ を同時に満たす点 (x,y) は存在しないので $g'(x)$ は常に $\boxed{9}$ （正または負）の値をとる．したがって関数 $g(x)$ は単調 $\boxed{10}$ （増加または減少）である．さらに $\boxed{6}=0$ と $F(x,y)=0$ を同時に満たす点 (x,y) を求めることにより，曲線 L の変曲点の座標は $\boxed{11}$ であることがわかる．

裏面につづく

問題 B 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 19\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [40 点]

uv 平面上の領域 $D = \{(u,v)\,|\,u>0\}$ で定義された 2 つの 2 変数関数

$$(*) \qquad x = x(u,v) = u\cosh v, \qquad y = y(u,v) = u\sinh v$$

を考えると，x の偏導関数は $\boxed{\ 1\ }$, y の偏導関数は $\boxed{\ 2\ }$ と u, v の具体的な式で表される．対応 $(u,v)\mapsto(x,y)$ は領域 D を xy 平面上の領域 $D' = \{(x,y)\,|\,x>0, -x<y<x\}$ に 1 対 1 に写す．とくに逆の対応 $(x,y)\mapsto(u,v)$ を $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ と書いておく（具体的に求めなくてもよい）．このとき xy 平面上の領域 D' で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して $\tilde{f}(u,v) = f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$ とおくと，チェイン・ルールから

$$\tilde{f}_u = \boxed{\ 3\ }f_x + \boxed{\ 4\ }f_y, \qquad \tilde{f}_v = \boxed{\ 5\ }f_x + \boxed{\ 6\ }f_y$$

が成り立つ．また $f(x,y) = \tilde{f}\bigl(u(x,y),v(x,y)\bigr)$ なので，この偏導関数は

$$f_x = \boxed{\ 7\ }\tilde{f}_u + \boxed{\ 8\ }\tilde{f}_v, \qquad f_y = \boxed{\ 9\ }\tilde{f}_u + \boxed{\ 10\ }\tilde{f}_v$$

を満たす．ただし $\boxed{\ 3\ }$-$\boxed{\ 10\ }$ には u, v の具体的な式が入る．さらに微分して

$$f_{xx} = \boxed{\ 11\ }\tilde{f}_{uu} + \boxed{\ 12\ }\tilde{f}_{uv} + \boxed{\ 13\ }\tilde{f}_{vv} + \boxed{\ 14\ }\tilde{f}_u + \boxed{\ 15\ }\tilde{f}_v,$$

同様に $f_{yy} = \boxed{\ 16\ }$ なので，$f_{xx}-f_{yy} = \boxed{\ 17\ }$ が成り立つ．ただし $\boxed{\ 17\ }$ には $\tilde{f}$ の u, v に関する偏導関数，2 次偏導関数と，(u,v) の関数の組み合わせで得られる式がはいる．
とくに $\tilde{f}(u,v) = F(v)$ の形で表される関数 $\tilde{f}$ に対して $f(x,y) = \tilde{f}\bigl(u(x,y),v(x,y)\bigr)$ が $f_{xx}-f_{yy}=0$ を満たすならば，$F(v) = \boxed{\ 18\ }$ と v の式を用いて表されるが，これに対応する (x,y) の関数は $f(x,y) = \boxed{\ 19\ }$ となる．

問題 C 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 9\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [10 点]

xy 平面の部分集合 $E = \bigl\{(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq x^2\bigr\}$ を含む領域で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上の積分は,

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} dx \int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}} f(x,y)\,dy = \int_{\boxed{5}}^{\boxed{6}} dy \int_{\boxed{7}}^{\boxed{8}} f(x,y)\,dx$$

と，2 通りの方法で累次積分で表すことができる．とくに

$$\iint_E \frac{x^3y^2}{(1+x^4)^2}\,dx\,dy = \boxed{\ 9\ }$$

であることがわかる．

問題 D つぎの 1 変数関数 f について以下の問いに答えなさい． [10 点]

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(1) f の導関数 f' を求めなさい．

(2) f' は 0 で連続か．理由をつけて答えなさい．

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1:5 点，2–3:5 点, 4–6:各 5 点, 7–8:5 点, 9–10:5 点, 11:5 点

1

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x^2+y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3(x+y^2)$$

2	3	4
$6(a+b)$	$a+b>0$	1

5

$$-\frac{x^2+y}{x+y^2}$$

6

$$\frac{2xy(x^3+3xy+y^3-1)}{(x+y^2)^3} = \frac{8xy}{(x+y^2)^3}$$

7	8	9	10
-1	-1	負	減少

11

$$(0, \sqrt[3]{5}), \qquad (\sqrt[3]{5}, 0)$$

計算スペース（採点の対象にはしません）

1: 単に「F の偏導関数」といえば F_x，F_y (1 階の偏導関数) のことを指す（講義ノート 12 ページ）ので，２階，３階の偏導関数を答える必要はない．

1: x, y の式が二つ書いてあるが，どれが F_x でどれが F_y かを明記していないものは不正解.

1: この文脈では “$f(t)$” を別の意味で用いているので，f_x, f_y などと書いたものは（たんなる書き間違いとは認めず）不正解とした.

2: “6” という答えが多かったが何故だろう.

5–6: 問題にあるように x と y の有理式で表す．ただし，x と y は関係式 $F(x,y)=0$ を満たしているので，答えの書き方はひと通りではない．ここに挙げてあるのはひとつの例.

満点は３名

学籍番号	氏　名

2013 年 6 月 18 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–2:5 点, 3–6:5 点, 7–10:5 点, 11–15:5 点, 16:5 点, 17–19:各 5 点

1. $x_u = \cosh v, \qquad x_v = u\sinh v$

2. $y_u = \sinh v, \qquad y_v = u\cosh v$

3. $\cosh v$

4. $\sinh v$

5. $u\sinh v$

6. $u\cosh v$

7. $\cosh v$

8. $-\dfrac{1}{u}\sinh v$

9. $-\sinh v$

10. $\dfrac{1}{u}\cosh v$

11. $\cosh^2 v$

12. $-\dfrac{2}{u}\cosh v\sinh v$

13. $\dfrac{1}{u^2}\sinh^2 v$

14. $-\dfrac{1}{u}\sinh^2 v$

15. $\dfrac{2}{u^2}\cosh v\sinh v$

16. $$\sinh^2 v\,\tilde{f}_{uu} - \frac{2}{u}\cosh v\sinh v\,\tilde{f}_{uv} + \frac{1}{u^2}\cosh^2 v\,\tilde{f}_{vv} - \frac{1}{u}\cosh^2 v\,\tilde{f}_u + \frac{2}{u^2}\cosh v\sinh v\,\tilde{f}_v$$

17. $\tilde{f}_{uu} + \dfrac{1}{u}\tilde{f}_u - \dfrac{1}{u^2}\tilde{f}_{vv}$

18. $av + b$ (a, b は定数)

19. $\dfrac{a}{2}\log\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right) + b$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 問題文では $\cosh v$, $\sinh v$ を用いているので，$(e^v + e^{-v})/2$ とわざわざ書かずに $\cosh v$ と書いた方が “よくあてはまる” (今回は減点していない)
- 1, 2: 二つの式の並びだけでは x_u がどれか分からないので不正解．dx/du は 1 名．以下 0 点．
- 1 で $x_v = -u\sinh v$ とした人が複数．マイナスは不要．双曲線関数の微分公式を覚えなおして下さい．また $\cosh v$ の微分が $-h\sinh v$ になっていた方 1 名．講義ノート 28 ページを見よ．
- 7–10: たとえば 7 で $1/\cosh v$ という解答多数．“なぜ偏微分では d/dx などという記号を使わないか” という疑問にからめて “$\frac{\partial x}{\partial u} = 1/(\frac{\partial u}{\partial x})$” は成り立たない，ということは何回か説明しましたね．
- 7–10: 問題文にあるように u, v の式で表して下さい．
- 7–10: $\cosh^2 v - \sinh^2 v$ をそのまま残している人が複数．この値は 1 です．覚えておいて下さい．

満点は 1 名

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：1–8:5 点，9:5 点

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	x^2	0	1	$\sqrt{y}$	1	$\frac{1}{48}(10-3\pi)$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 7–8: 0, $\sqrt{y}$ という解答多数．積分範囲の図をちゃんと書いてご覧なさい．なお，今回は，7–8 を 0, $\sqrt{y}$ として，積分の値が $\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}$ となっている方は 9 を正解とした（次回は未定）
- 9: ここに x や y が入っているのはどうしたことだろう．

満点は 17 名

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 各 5 点

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

(2) <u>連続でない</u>

正の整数 n に対して $x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ とすると，$\{x_n\}$ は 0 に近づく数列で，

- $2x_n \cos\frac{1}{x_n} \to 0\ (n \to \infty)$
- $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n+\frac{1}{2})\pi = 1 \to 1\ (n \to \infty)$

であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. これは $f'(0)$ と一致しないので f' は 0 で連続でない．

計算スペース（採点の対象にはしません）

- (1) の $x \neq 0$ での導関数の表示が $2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ となっている方が複数．第 2 項の符号が違います．さすがにまずいと思うので不正解としました．
- (1): $f'(0) = 0$ ではありません．不正解．また $f'(0)$ を明記していない方も不正解．
- (2): $x \to 0$ のとき "$\sin\frac{1}{x}$ が振動する" という解答多数．振動する，という語の意味は何か．
- (2): $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) \neq \lim_{x\to-0} f'(x)$ であるから，という理由も複数ありましたが，左辺も右辺も存在しないので，ナンセンス．不正解です．
- (2): $f(x)$ が連続，という議論をして下さったかたもいらっしゃいますが，微分可能なら連続なので，それは自明．
- (2): "$x = 2/((4n+1)\pi)$ とすると $x \to 0$ のとき $n \to \infty$" という書き方をされた方が多数いらっしゃいましたが，オリジナルは何でしょう．講義ノート 19 ページの (iv)（これは 2 変数版だが 1 変数に翻訳すれば）から "1 変数関数 F が $\displaystyle\lim_{x\to a} F(x) = A$ を満たすための必要十分条件は a に収束する <u>任意の</u> 数列 $\{x_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(x_n) = A$ が成り立つこと"．したがって "1 変数関数 F が $\displaystyle\lim_{x\to a} F(x) = A$ を満たさないための必要十分条件は a に収束する <u>ある</u> 数列 $\{x_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(x_n) \neq A$ が成り立つこと"．だから，この問題の場合は 0 に収束する数列 $\{x_n\}$ をうまく具体的にとって $f'(x_n)$ の極限を調べてそれが $f'(0) = \frac{1}{2}$ と一致しないことをいえばよい．記述の順序は次の通り：(a) $\{x_n\}$ を具体的に与える (b) それが 0 に収束することを述べる．(c) $f'(x_n)$ が $f'(0)$ に収束しないことを示す．冒頭に挙げた書き方には非常に違和感を覚えます．

満点は 6 名

学籍番号	氏　名

2013 年 6 月 18 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2013 年度入学の方は，学籍番号のうち "13_" を除いた番号の席に着席してください．
- 2012 年度以前入学の方，および科目等履修生の方，ご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- **解答用紙 5 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名