

2013 年 7 月 9 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微積分学第一講義資料 11

前回までの訂正

- 講義資料が web ページから落とせなかったというご指摘が複数ありました。修正しました。
- アステロイドを astroid と書きましたが “asteroid” ではないかというご指摘がありました。たとえば Wikipedia の見出しは “astroid” で、“Not to be confused with asteroid” と書いてあります。ただ一方では “sometimes spelled asteroid” と書いてあるようです。というわけで astroid は誤りではありません。
- 積分の変数変換の説明で $f(t) = t^2\sqrt{1-t^2}$ に対して $\varphi(u) = \sin^2 u\sqrt{1-\sin^2 u} = f(\sin u)$ の根号のあとの 3 乗が抜けていたというご指摘がありました。
- 中間試験解答例、問題 A の [6] の解答：
$$\frac{2xy(x^3 + 3xy + y^3 - 1)}{(x + y^2)^3} \Rightarrow \frac{-2xy(x^3 + 3xy + y^3 - 1)}{(x + y^2)^3}$$
- 講義ノート 78 ページ 4 行目：

$$D' := \{(x, y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} \Rightarrow D' := \{(x, y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- Pappus-Guldin の定理について「パプスとギュルダンは 16 世紀」と言ったのは誤りで、パプスは 4 世紀、というご指摘がありました。そう言いませんでしたっけ。
- 「有理数を偶数と言っていました」とご指摘がありました。文脈がわかりませんが、有理数指数の所でしょうか？
- 「黒板 7 の板書で（判読不能、まあそんなんですが）という字があって読めませんでした。」というご指摘がありました。前後の文脈を教えてくださいませんか。

授業に関する御意見

- 「平行四辺形の面積にベクトルの外積を用いる」等線形の理解も必要と感じました。 山田のコメント： そりゃ当たり前です。
- 夏休みに微積の補講ってあるんだろうか... あるなら行きたいな～ 山田のコメント： めんどくさいのでやりません。
- やはり抽象的なものごとの方が考えやすいですね。(周りに理解者が少ないです) 山田のコメント： そうですよ！
- とっても具体的でした。 山田のコメント： でしょ。
- 中間は成績にどのように影響するのですか。
山田のコメント： 4 月に説明したとおり。原則として定期試験の結果で成績は決める。ただし、合否ぎりぎりの得点の方は、中間試験・質問用紙の成績を見ながら判断する。また、定期試験にて中間試験と同じ間違いをした学生が多いのだと山田の機嫌が悪くなる、という点で成績に影響するかもしれません。
- どうやら 11 年度では評定計算式があるようで、今回もその方式でいくんですか。 山田のコメント： 決めてません。
- 中間試験の平均点は何点ですか？ 成績は中間試験と期末試験の平均で評価しますか？
山田のコメント： 「成績」なんていう字を書かれたら答える気がしません。と 4 月に述べたはず。
- 期末は中間より難しくするつもりですか？ よかったら易しめをお願いします(; ;)
山田のコメント： だれにとって？
- 中間テストがすべて返ってきた！ 本当の戦いはこれから！ 山田のコメント： たたかい... だったんですか...
- 期末がんばりたいです。 山田のコメント： どうぞ
- 中間が予想よりはるかに低い... もうだめだあ、落単確定だあ 山田のコメント： そりゃ残念だね。
- 助けて下さい。 山田のコメント： 助かって下さい。
- ねむい 山田のコメント： おやすみ
- いくつかの解法のうちどれでも答にはたどり着けるけれどもとある一つ以外は... \ (^o^)/ ってよくあるギャブルですよな。 山田のコメント： なんのことやら。
- (山田注：質問内容について) 数学関係なくごめんなさい。これしかみつからなかったんです。
山田のコメント： 結構です。そういうやつでもよいです。ありがとう。
- $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$ はどこかの東工大模試に出てきた気がします。 山田のコメント： そうですか。
- 先生、サスペンダーがお似合いです。今は僕はベルトですが、サスペンダーもいいと思います。先生はどうしてされるようになりましたか。 山田のコメント： 大昔のことなので忘れちゃった。

特別講義に関するコメント：

- 6月25日の講義で八木アンテナはなくなったというようなことが言われていたが、少なくとも自分が見ている世界では普通に多くの家の屋根の上についているし、21MHz や 28MHz では八木アンテナと呼ばれる別のものが使われている。ということだろうか。自分に見えているのは「八木・宇田アンテナ」なのだろうか。
- 特別講義について質問します。広川二郎先生に質問です。ラジアルラインスロットアンテナはなぜ地上の通信にはあまり使われないのですか？

質問と回答

質問：“ $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0$ ” ってとっさに思いつくものなののでしょうか。講義中にボカンとしてしまいました。

お答え： とっさ、というのはどれくらいの時間を指しているのかわかりませんが、15分くらい試行錯誤をすればすぐにわかります。

質問： $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0$ の変型がよくわかりません。

お答え： 何が分からないのでしょうか。同値であることの証明でしょうか。それとも右の式を導く方法でしょうか。前者なら講義で説明した。後者は15分くらい試行錯誤すればわかる。高等学校数学レベルです。

質問： $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$ のアステロイドの形はサイクロイド曲線でも見たことがありうのですが、同一のものを表すことは可能ですか。

お答え： 内サイクロイドの特別な場合になっています。

質問： $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$ を $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ とかかない理由がよくわかりませんでした。教えて下さい。

お答え： x や y が負の実数の場合も考えたいから。高等学校の教科書にある通り、非整数乗は正の実数に対して定義されます。

質問： $\sqrt[3]{x^2}$ と $(\sqrt[3]{x})^2$ はどちらも $x^{\frac{2}{3}}$ と書けないのでしょうか。 $(\sqrt[3]{x})^2$ は $x > 0$ が自動的に定義されませんか。

お答え：“ $(\sqrt[3]{x})^2$ は $x > 0$ が自動的に定義される” という文の意味がわかりません。 $\sqrt[3]{x}$ はすべての実数 x に対して定義されます。“すべての実数 x が定義される”ではありません。

質問： $|D'| = \iint_{D'} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^3}}} dy \right) dx$ をパラメータ表示で解くとどうなるんですか。 $(D' : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \wedge x > 0 \wedge y > 0)$

お答え：“ \wedge ” は and の意味ですね。パラメータ表示 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ を用いると、求める面積は

$$\int_0^1 y dx = \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t \frac{d \cos^3 t}{dt} dt = 3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt$$

となります。

質問：重積分で、積分区間に変数が入っていない場合は個別に積分したものを互いにかければよいのでしょうか。

お答え：何を個別に計算するかわからないので、ご質問の意味を正確に取りかねていますが、被積分関数によります。 $D = [0, 2] \times [0, 2]$ として

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^2 (x^2 + y) dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{8}{3} + 2y \right) dy = \dots$$

というのは個別に計算してかけたことになっていますか。

質問：重積分と累次積分の違いは何ですか。

お答え：次の例： $D = [0, 1] \times [0, 2]$ のとき

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + y) dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + y) dy \right) dx$$

の最初が重積分。2番目、3番目は、重積分を二回の一変数関数の積分に書き換えたもので、この形を累次積分といいます。

質問： 面積など求めるとき被積分関数 1 なのですが、面密度が 1 でないとするとどうやってだすのですか。

お答え： なにを出すのでしょうか。質問文の前半は「被積分関数が 1」ということを言っていて、「出す」に相当するものが見つからないので、お答えしようがありません。

質問： 面密度が 1 でなく $\rho(x, y)$ で与えられたら、領域 D における図形の重さは $\iint_D \rho(x, y) dx dy$ ですか？

お答え： ということをお 6 月 11 日の講義で説明した。

質問： 密度の違う面積の質量を求める問題ってあるんですか。期末で重心を求める可能性はありますか。

お答え： 「面積の質量」という語に意味がないと思うので、そういう問題はあります。面密度が一様でない板の質量を求める、というのはもちろん試験範囲です。重心を求める問題も試験範囲です。

質問： 11.3 の計算で三重積分の関数がなぜ 1 なのか分かりません。

お答え： 「三重積分の関数」では何のことか分かりませんね。被積分関数のことでしょうか。平面図形 D の面積は D 上で 1 を積分した値でした（講義ノート 73 ページ）。同様に、空間図形 D の体積は D 上で 1 を積分した値、すなわち（体積）密度 1 の物体の質量（講義ノート 74 ページ）となります。

質問： 例 11.3 では D の境界を表す方程式 ($z^2 = 4x, y = x - x^2$) はともに 2 変数関数でイメージしやすく、式変形は容易でしたが、これがたとえば D が \mathbb{R}^4 の部分集合で、境界を表す方程式も陽関数表示できない場合はどのような方針で積分区間を決めればよいのですか？

お答え： n 変数の問題であれば、まず $(n - 1)$ 個の変数を固定して、残りの変数の変化する範囲を考えます。このことで n 重積分は、一つの変数関数の積分から得られる関数の $(n - 1)$ 重積分になおすことができます。簡単な例をやってみます： $D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$ すなわち \mathbb{R}^4 の“球”の体積を求めましょう。積分範囲 D で、定数関数 1 を積分すればよいのですが、まず x, y, z を固定すると、 w は $w^2 \leq 1 - x^2 - y^2 - z^2$ を満たしていますから、その動く範囲は $-\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ から $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ の間。また、このような実数 w が存在するためには (x, y, z) は $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ の要素、すなわち \mathbb{R}^3 の単位球の点であることが必要十分。したがって

$$\iiint\iiint dx dy dz dw = \iiint\iiint_{D_1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} dw \right) dx dy dz = \iiint\iiint_{D_1} 2\sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dx dy dz$$

となります。つぎに (x, y) を固定すれば、 $(x, y, z) \in D_1$ であるためには $z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ 。このような実数 z が存在するためには $x^2 + y^2 \leq 1$ が必要十分だから、 $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とすれば、上の式の右辺は

$$2 \iint_{D_2} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dz \right) dx dy = 2 \iint_{D_2} \frac{\pi}{2} (1 - x^2 - y^2) dx dy$$

となる。最後の式は、正の数 a に対して $\int_0^a \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{\pi a^2}{4}$ であることによる。さらに、最後の積分は

$$\pi \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy \right) dx$$

となるので、計算が完了する。

質問： 問題 10-2 が分からなかったです。

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ 次元球は } w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \dots D_1 & \text{において } \iiint\iiint_{D_1} dw dx dy dz \\ 5 \text{ 次元球は } v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \dots D_2 & \text{において } \iiint\iiint\iiint_{D_2} dv dw dx dy dz \end{array}$$

とすればよいのですか。

お答え： よいです。

質問： 問題 11-5 で曲面の面積が $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ となるのがよく分かりません。 $y = f(x)$ において $[a, b]$ における曲線の長さ $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ と似ていますね。こんな図の解釈でいいですか？（図略、半径 $f(x)$ 、幅 $\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ の円柱の側面積の積分という意味です）

お答え： 幅 $\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ がよくわからないですね。こんなふうに考えましょう。グラフ上の 2 点 $P = (x, f(x))$, $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ を考えると、微分係数の定義から、十分小さい Δx に対して $Q \div Q' = (x + \Delta x, f(x) + f'(x)\Delta x)$ と書ける。そこで、線分 PQ' を x 軸の周りに回転させてできる薄い円錐台の側面積を考え、それを積分すると考えると、公式が得られます。

質問： 問題 11-3 の 2 版目 (テキスト p 119 3 (3)) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ の体積 V . $x = au, y = bv, z = c\sqrt{w}$ とおけば、与式 (山田注: どの式のことか。あまり使わないほうが良い語だと思う) $= u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. (中略: 空間極座標への変換をしている) $V = \frac{8abc}{5} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}$ までたどり着きましたが、先に進めません。これで正しいでしょうか。テキスト解答から逆算すると $\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} = \pi$ のようですが...

お答え： 実は空間極座標に変換しなくても、 x, y, z の順番で累次積分を行えばそれほどむずかしくなく答がでます。ちなみにご質問の積分は π にならないので、答とは一致していないようです。

質問： 問題 11-1 が二次元累積和 (例: 第 10 回 JOI 本選問題 1) と似ている気がしたので比較してみた。(山田注: 以下、字が薄くて小さいのでコピーは勘弁してください!)

お答え： 1 次元累積和 (でいいんですね) についても 1 変数関数の積分の考え方が使えますね。“差分” と “和分” の関係です。そのもう少し複雑なバージョンと思えないこともないですね。ちなみに JOI って一般的に通じる略語なんですか?

質問： 重心の座標の式の意味がよくわかりません。 $\frac{1}{|D'|} \left(\frac{\iint_{D'} x \, dx \, dy}{\iint_{D'} y \, dx \, dy} \right)$?

お答え： 右辺は 2 つの実数の組。これを平面上の点の座標と思う。

質問： 重心の座標 $\frac{1}{|D'|} \left(\frac{\iint_{D'} x \, dx \, dy}{\iint_{D'} y \, dx \, dy} \right)$ における $|D'|$ とは何ですか。体積ですか?

お答え： 講義ノート 73 ページ一番下。

質問： 先生が最後に出された置換積分の例で、 $\cos u$ をかけるかわりに直観的に $\frac{\pi}{2}$ で割りたくなったのですが、一般的にはともかくあの例では正しいといえますか。

お答え： いえません。 $t = \sin u$ という置換を行ったときに、 t 直線上の“微小区間” と対応する u 直線上の微小区間の長さの比は u の値ごとに違いますので、全体の長さの比をかけるだけでは済まないわけですね。高等学校でならった置換積分法の公式はそのことを表しています。

質問： $f(t) = t^2\sqrt{1-t^2}$, $\varphi(u) = f(\sin u)$ ($0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$) で、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_N = \frac{\pi}{2}$ のように分けたとき、 $t_{j+1} - t_j = \cos u_j(u_{j+1} - u_j)$ となっていました。なぜ区分けの幅の比が一定にならないのですか。

お答え： すこし情報が不足しています： t_j, u_j の関係は $t_j = \sin u_j$ 、すなわち、2 つの分割は、変数変換 $t = \sin u$ で対応しています。この変換で小区間の長さの比が (どんな分割をとっても常に) 一定であるためには t が u の 1 次式で表されることが必要十分です。 $\sin u$ は u の 1 次式ではないので、比が一定にならないのです。微分の定義から $t = t_j, u = u_j, \Delta t = t_{j+1} - t_j, \Delta u = u_{j+1} - u_j$ とすると、

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{j+1} - t_j = \sin u_{j+1} - \sin u_j = \sin(u + \Delta u) - \sin u = \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin u}{\Delta u} \Delta u \\ &\doteq (\sin u)' \Delta u = \cos u \Delta u = \cos u_j (u_{j+1} - u_j) \end{aligned}$$

というわけです。

質問： 置換積分に関する質問です。こう置くのときは $\int x \, dx$ の dx は分数のように扱えるから $\int x \, dx = \int x \frac{dx}{du} du$ とできると習いましたが、この考え方と比べて、先生の使った考え方 (グラフを用いたもの) の方が積分の定義にそっていることは分かりましたが、他にも先生の考え方の方が便利な点はありませんか。

お答え： 前半に書かれているのは “置換積分の公式の覚え方” であって、その公式が成り立つことの説明にはなっていません。前回説明したのは、置換積分の公式がなりたつ “おおざっぱな” 理由です。すなわち、ご質問にある 2 つの説明は、説明の性質が全く違い、同列には扱えません。

質問： $t = \sin \theta$ とおいたときの $dt = \cos \theta d\theta$ この $\cos \theta$ が表しているものは、左図の正方形の面積を $r = \sqrt{2}x$ を用いて考えた $S = \int_0^1 dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dr$ の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ が表しているのと同じ意味合いですか? (山田注: 左図、で表されているのは xy 平面上の正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ とその対角線だけ。 r は図示されていません。)

お答え： $\frac{1}{\sqrt{2}}$ が表すものはいろいろあると思うのでもう少し抽象的に質問していただかないと答えられません。

質問： 重積分の変数変換で、微小面積の比倍するのはなんとなくはそうだなと思うんですが、**はっきり**とした理解に至

りません．ぼんやりとした感じでも大丈夫ですか？

お答え： 公式はきちんと覚えておいていただきたいですが，その理由は“ぼんやり”で結構だと思います

質問： 重積分で問題がつくりにくいと言っていたのですが，重積分の問題がつくりにくいというのはこういう関数を用いるとできないというようなある共通の特徴があるのでしょうか．

お答え： つくりにくいのは，計算の難しさが被積分関数の形だけではなく，積分範囲の形にもよること，さらに累次積分への直し方（どの変数で先に積分するか）によって計算の難しさが変わる場合があることによります．

質問： e^{-x^2} の原始関数が存在しないことの証明はされていると以前言っていた気がしますが，どのような証明なのですか．

お答え： 存在しないとは言っていません．むしろ，存在します： $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ とおけば， $F(x)$ は e^{-x^2} の原始関数です（あたり前）．授業で述べたのは「初等関数で表すことができない」ということ．全然違う，ということを理解してください．初等関数で表すことができない事実の証明は自明なものではありません．もともとは 1883 年の Liouville の論文のようで，論文一本分の事実です．日本語で読める解説があるとよいのですが，見つけできていません．

質問： そもそも積分は微小部分を切り捨て（又は水増し）した面積でほぼイコールの値ですが，微小な値 Δt , Δu の差が無視するには大きすぎるといえることですか．

お答え： 文脈と意味がよくわかりませんが，推測すると“ほぼイコール”ではなく，極限值としてきちんとイコールです．すなわち「そもそも」と大上段にかまえて言っていることが間違いです．

質問： $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ とありましたが，そもそも $x > 0$ が定義されていないのに \int_0^1 と書いてもよいのでしょうか．

お答え： それが広義積分．普通の積分の定義を拡張します．次回にやります．

質問： 広義積分で ε を使うのは ε - δ と関係があるのか．

お答え： 小さい数を ε と書く習慣があります．いわゆる“ ε - δ 論法”で表れる ε や δ と書かれる数はやはり小さい数です．その程度の関連です．

質問： 多重積分の表記 $\iiint \dots \int$ のように重ねる以外にないんですか？

お答え： たとえば，考えているのが \mathbb{R}^n の部分集合であることが文脈からわかるならば \int を n 個並べず一個で済ましてしまうこともあります．

質問： 黒板に $D\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ とありましたが， (x_y^2) は $(x^2 + y^2)$ では

お答え： どうして違っていると思うのでしょうか． $x^2 + y$ はこの範囲で積分できると思いますが．ちなみに $D\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ とは書いていません． $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ です．集合として等しいということを書いてるので等号が必要です．

質問： 多重積分の一変数固定するのは偏微分の逆といえるのでしょうか．

お答え： 見方によっては言えると思います．

質問： 積分は微分の何倍も難しいと高校で教えてもらった記憶がありますが，この分野でも全く同じ事が成り立つのでしょうか．

お答え： 見方によっては積分は微分よりもずっと易しいのです．例えば，連続関数でも微分可能でないものが存在します．“微分ができる”関数は特別な性質を備えているわけです．一方，連続関数は積分可能です（定理 9.4）．このことから，積分可能な関数を見つける方が，微分可能な関数を見つけるより簡単なことがわかります．これをもって「積分は微分より簡単」ということだってできるわけです．これはたんなる言葉の遊びではなく，数値計算の世界では“数値微分”は“数値積分”にくらべてずっと難しいのです．高等学校の先生がおっしゃっているのは「具体的に与えられた関数の積分を計算することは微分を計算することの何倍も難しい」ということだと思うのですが「難しい」という語の意味をはっきりさせずにこういうことをいうのは無責任だと思います．

質問： ふつうの部分集合とコンパクト部分集合のちがいがよくわかりません．また，コンパクト部分集合で面積確定集合でないものはどういったものなのでしょうか．

お答え： 前半： \mathbb{R}^2 は \mathbb{R}^2 のコンパクト部分集合でない．長方形 $[a, b] \times [c, d]$ はコンパクト．後半：病理的な例がありますが，ここでは深入りしません．

質問： 0^0 は定義されていますか．

お答え： 不定形です．雑に言えば“対数をとると $0 \times \infty$ の不定形”になります．たとえば $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ となる 2 つの関数 f, g をうまく選んでやれば $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)}$ を好きな値にすることができます．例：定数 a に対

して $f(x) = \exp \frac{-1}{|x|}$, $g(x) = -a|x|$ とおくと, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = e^a$.

質問: 中間試験について, 問題 B で $\tilde{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ で u_x, v_x, u_y, v_y の値は何故 f のヤコビ行列の逆行列の成分になるのですか.

お答え: 講義ノート 43 ページ命題 6.8. 具体例は例 6.10.

質問: 微分可能性がよくわかりません.

お答え: そうですか(としか答えようがありません).

質問: 中間ボロボロでした. どうすれば単位がとれるんでしょうか. それとも申告取り消しを考えた方がいいのでしょうか.

お答え: 基本的に期末試験の成績を評価に用いますので, これでいいスコアをとればよい.

質問: 成績のつけ方について質問です. 基本的に期末の点数が成績として使われるんですよね? 中間の点数は期末の点数が悪かったときのみ考慮されるのですか.

お答え: こんな漢字を書かれると答える気がおきません(ということも 4 月に述べた).

質問: 中間試験の平均点を教えて下さい.

質問: 中間テストの平均・中央値・標準偏差はそれぞれいくつですか.

お答え: 聞いてどうするの?

質問: テストの採点にどれくらいの時間がかかりましたか?

お答え: 3 時間.

質問: 期末テストは中間テストより簡単ですか?

お答え: だれにとって?

質問: 中間テストの採点は厳しめでしたが期末テストの採点は比較してどのようですか? (例: 答えはあっていれば丸にするかどうかなど教えて下さい.)

お答え: 同じです.

質問: 化学で水素原子のシュレディンガー方程式の講義で, 「この微分方程式は君たちが一夏かかってもとけないでしょう. こういうのは既に解かれている似た形のをあてはめて...」という話があったのですが, そのようなことが先生がいう「具体的な運用」ということですか?

お答え: ちょっと違うかもしれない. 水素原子のシュレディンガー方程式は $\Delta + \frac{c}{r}$ (c は定数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) という形の微分作用素の固有値問題です. 一方, この方程式は水素原子の状態を記述する場面以外にもさまざまな場面で現れます. なので「この式は水素原子の...」とか「この式は...の...」などという言明でイメージを限ってしまうのはよくないだろうと思うのです. これが「具体的にアツかいたくない」一つの理由. もうひとつ, 具体的に扱いたくなり理由: 汎用性が高い数学的技術の一つに「掛け算九九」があります. 具体的な状況・問題, たとえばりんごを 3 個ずつ 7 人に配るということを考えましょう. 本当に具体的な状況では, りんごの種類, 大きさ, 値段, 7 人の年齢, 性別などさまざまなノイズが入ります. 一番大きいりんごをだれに渡すのがよいのでしょうか...そこからある種のエッセンスを取り出して, 掛け算の問題にするのが抽象です. 掛け算を考えるのに常に具体的な問題に戻るの効率的ではなく, ノイズを除いた抽象論をきちんとおさえるのが早道だと思います.

質問: 今回の授業ではとても具体的なことを扱っていましたが, 先生が仰った“具体的なものの方がノイズが入ってしまい難しい”というのは, そのノイズも含めているいろいろなことを関連づけて運用できるという面では一概に具体的なことの方が難しいとは言えないのではないのでしょうか.

お答え: いろいろな意見があるとは思いますが, 抽象的な概念はそこそこに落ちているものではなく, 具体的なものを数多く調べた中から人間により抽出されたものです. したがってうまくつくられた抽象概念は, 多くの場面に適用されるようなものです. 抽出の作業は大変時間がかかりますから, ものごとを“効率的”に理解するためには, 抽象的な概念を用いるのがよいと考えます.

質問: 個人的には具体例があるとわかりやすくありがたいと思うのですが, 「具体例の方がわかりにくい」とおっしゃった先生がわざわざわかりにくいことを教えたのはなぜですか?

質問: 具体例の方がわかりにくいとおっしゃっていましたが, そう思ったら, なぜ具体例を用いて授業するのですか.

お答え: そうしてほしい, というご希望が複数の学生さんからあったからです.

質問: 工学部用のカリキュラムとききましたが, 本当のカリキュラムではどのような順なのですか?

お答え: これが本当のカリキュラムです. 決して偽物ではありません.