2013 年 7 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 12

前回までの訂正

- 教科書 192 ページ，2(3) の解答：$\frac{a^4}{16} \Rightarrow \frac{\pi a^4}{16}$.
- 黒板に書いたヤコビ行列の行と列が逆になっていたところがあるようです：
$$\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$
もちろんヤコビアン（行列式）をとればどちらでもよいわけですが.
- 一変数関数の積分の復習にて，$\displaystyle\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j) \Rightarrow \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)$.
区間の分割を $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ としましたから，ご指摘のように範囲をとる必要があります.
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a\sin^{-1}\frac{a}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{a}{x}$
- 講義資料 11， 2 ページ，20 行目：賭けない ⇒ 書けない
- 講義資料 11，4 ページ，一番下： はっｋり ⇒ はっきり
- 講義ノート 12，83 ページ，6 行目：$\det(\boldsymbol{v}, \overrightarrow{PQ}) \Rightarrow \det(\overrightarrow{PQ}, \boldsymbol{v})$
- 講義ノート 12，83 ページ，補題 12.5 の証明：(1.1) ⇒ (12.1)

授業に関する御意見

- 今回の内容は理解しやすかったです. **山田のコメント：** そう？ ちゃんとした理屈を語らなかったからか.
- 具体例を出してくれてありがたいです. **山田のコメント：** そう？ 具体的と思っていない人もいるような.
- ヤコビ行列，初めて見た時は意味が分からなかったが，こんなに役立つなんて.... あと耳鳴りがひどくてきつかったです.
  山田のコメント： そうなんだよね．使う場面から入ってさまざまな item を出していく，という手もあるんですが，効率が悪いもので．耳鳴りお大事に．一度，診察を受けることをおすすめします.
- 後期も山田先生が授業するんですか. **山田のコメント：** するんですよ.
- てんさくコメントが最近リアルに読めない. **山田のコメント：** ごめんなさい．講義資料を見て.
- 大学生活は闇 **山田のコメント：** 無駄に明るいよりよいかも.
- 最近（ゲームに）忙しくて落ち着いて書くヒマがありません. **山田のコメント：** 残念/羨ましいです.
- 今日，僕の誕生日なんですよ. **山田のコメント：** またひとつおにいさんになったね.
- 今日は教室の中が快適でよく眠れました. **山田のコメント：** おはよー
- 先生ベルトでしたね. **山田のコメント：** はい
- 今日はなぜサスペンダーではなかったのですか. **山田のコメント：** ジャケットを着てないから
- あついですね．スーツでこの気温は大変ですね. **山田のコメント：** 今日はジャケット着てないけど見てなかった?
- 先生はいつも何時間寝てますか? **山田のコメント：** 6
- 期末テストの点数と成績はどのように対応させるのでしょうか．相対評価あるいは絶対評価どちらですか.
  山田のコメント： なるべく得点がそのまま評点になるように問題を作ります．が，それで不合格が多い場合，高い得点の方はそのまま，低い得点の方は提出物や中間試験で上げ底します.
- このカメラで撮ってある議議（原文ママ）は OCW-i で見れるのですか? **山田のコメント：** みれません.
- $\iint x^2 + y\,dx\,dy$ の u, v での積分は答えを得ましたが，xy での積分は計算が複雑になってたどりつきませんでした．どちらが容易かは判りましたがどちらでも同じ解を得ることは示せませんでした. **山田のコメント：** 結構時間がかかると思います.

特別講義に関する質問

- ずっと前の質問なのですが，中間テスト後の特別講義では 2 人とも電気電子工学科から来たと思いますが，情報工学で微積はどのように使われるのでしょうか.

質問と回答

質問： 「uv 平面での長方形の範囲は $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ で xy 平面のほぼ平行四辺形に移る」との説明がありましたが，講義ノート第 12 回では「線形変換では直線は直線の，平行線は平行線の像をもつ」とあります．「ほぼ」とは線形変換だけを考えているわけではないからなのでしょうか?

お答え： そのとおりです．座標変換 $(x,y) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ で (u_0,v_0) が (x_0,y_0) に移ったとしましょう．このとき，(u_0,v_0) に近い点 (u_0+h, v_0+k) が $(x_0+\xi, y_0+\eta)$ に移るとすると，

$$\xi = x(u_0+h,v_0+k) - x_0 = x(u_0+h,v_0+k) - x(u_0,v_0) = x_u(u_0,v_0)h + x_v(u_0,v_0)k + \varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2},$$
$$\eta = y(u_0+h,v_0+k) - y_0 = y(u_0+h,v_0+k) - y(u_0,v_0) = y_u(u_0,v_0)h + y_v(u_0,v_0)k + \varepsilon_2(h,k)\sqrt{h^2+k^2},$$

と書けます（微分可能性の定義；講義ノート 21 ページ）．ただし，$\varepsilon_j(h,k) \to 0$ $((h,k)\to(0,0))$ $(j=1,2)$ である．とくに，(h,k) が小さければ最後の項は前の項にくらべて十分小さいから近似式
$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \doteqdot \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0)\\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$ が成り立ちます．すなわち，$(h,k)\mapsto(\xi,\eta)$ は線形変換で近似されます．線形変換だとすると，(h,k) 平面での長方形は (ξ,η) 平面での平行四辺形に移りますが，実際には誤差の項があるので “ほぼ平行四辺形” に移るわけです．

質問： $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ のとき $\boldsymbol{a} = \binom{x_u}{y_u}\Delta u$, $\boldsymbol{b} = \binom{x_v}{y_v}\Delta v$ としたとき，変換後の微小面積が $|\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$ となるのはなぜですか．

お答え： 長方形 $[u, u+\Delta u]\times[v, v+\Delta v]$ に対応する xy 平面上の図形が，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形とほぼ一致するから．

質問： $\frac{x(u_{j+1})-x(u_j)}{u_{j+1}-u_j} \doteqdot \frac{dx}{du}(u_j) +$ おつり のおつりとは何のことかよくわかりません．

お答え： 第 3 回講義（微分可能性）の項参照．一変数関数 f が a で微分可能なら $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$ $(\lim_{h\to0}\varepsilon(h)h = 0)$ となります．この $\varepsilon(h)h$ の項のことを指しています．

質問： 根本的なことをきいてしまいますが，変数変換はその変数と同じ数の変数を対応させないといけないですか? $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{w^4} = k$ などとなって変換はできないのですか．

お答え： 変数の数を減らすと 1 対 1 になりにくくなります．変数の数を増やすと次のような問題がおきます：一般に n 重積分は $\mathbb{R}^n$ の n 次元分の広がりをもった “体積” に関数の値をかけて総和をとったもの（の極限）なので，変数の数を変えてしまうと “体積” の概念が継承されません．たとえば平面上の単位円板の面積は π ですが，これを空間の部分集合とみなすと，体積 0 になってしまいます．

質問： 2 変数ではなくて 1 変数の変換を書いやっても答は一致しますか?

お答え： ちょっと想像しないといけませんが... 変数変換 $x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$ の x が u のみの関数, y が v のみの関数ということですね．あとは想像してください（質問と同じレベル）．

質問： なぜヤコビアンが面積比となるのですか? ヤコビアンが先にあって面積比になっているとわかった感じですか?

お答え： 関数を線形変換で近似したときの係数行列がヤコビ行列であることからきています．

質問： ヤコビアンについて $\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix} = x_uy_v - x_vy_u$, $\begin{vmatrix} x_v & x_u\\ y_v & y_u\end{vmatrix} = x_vy_u - x_uy_v$ より，$\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_v & x_u\\ y_v & y_u\end{vmatrix}$ となるため，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,u)}$ となるということで正しいしょうか．

お答え： 正しいですが，“行列式は列を入れ替えると符号が変わる” のは線形代数で習いましたよね．

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$ の絶対値について，もしこの絶対値がなかった場合，$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} < 0$ のとき（原文ママ，この “det” は不要），意味はどのように変わりますか．（図形として表したとき，原点に対して対称になる等）

お答え： “意味” とは何を指しているでしょう．ヤコビアンが負であるようなパラメータ変換を “向きを反転するパラメータ変換” といいます．たとえば $(x,y) = (v,u)$ ならヤコビアンは負ですね．

質問： $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の変数変換のとき，$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で「ほぼ 1 : 1」と言っていましたが， 積分において境界の概念はあまり大切ではないのでしょうか．

お答え： 例えば（証明しませんが）平面上の線分は面積 0 の面積確定集合になります．従って有界な関数をここで積分すると 0．だから $\theta = -\pi$ に対応する線分を積分する範囲に含めても含めなくても積分の値は変わりません．

質問： プリントの定理 12.7 は「1 対 1 に対応しているとき」とありますが，授業中の例ではほぼ 1 対 1 の対応でした．この例のように，ごく一部の点は 1 対 2 の対応，他は 1 対 1 に対応する場合でも定理 12.7 は成り立つと考えてよろしいですか?　**お答え：** 上の質問と回答参照．“重なる部分” が面積 0 であれば大丈夫です．

質問： 積分範囲を円板としたときの積分で，極座標による変数変換を用いていきなり $0 \leqq r \leqq b$ で積分してもよいのでしょうか． **お答え：**よいです．(r,θ) 平面で $\{(0,\theta) | -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$ の面積が 0 であることが理由です．

質問： $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0$ のとき変数変換は可能ですか?

お答え： “det” は不要．ごく一部が 0 ならうまく行くこともある（授業でやった極座標変換がそう）．

質問： $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ としてますが，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0$ などとなるとき定理 12.7 の式はどうなりますか．

お答え： そういう点が少しだけなら OK．授業でやった例は $r=0$ のところだけヤコビアンが消えている．

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv$ の式において D は x, y の xy 平面における領域，E は u, v の uv 平面における領域ということでよろしいのでしょうか．

お答え： “x, y が動く範囲” という意味で正しいということを説明したが，“領域” はまずい（講義ノート 18 ページ）．

質問： ヤコビ行列（原文ママ：ヤコビ行列式のことか）はいうなれば微小面積の比だから $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ と表すのですね．その比が det で求められるということは，そもそも det にはそうした意図もあったのでしょうか．

お答え： “だから” がおかしい．表すの理由が微小面積の比？ 2 次行列の行列式の絶対値は，列ベクトルを 2 辺とする平行四辺形の面積，3 次行列の行列式の絶対値は，列ベクトルを 3 辺とする平行 6 面体の体積．

質問： (x,y) から (u,v) に変数変換をするときに $E \ni (u,v) \mapsto (x,y) \in D$ と E から D への写像のように書くのは何故ですか．(D から E ではおかしいですか，という意味です)

お答え： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ を基準として，これを (u,v) に関する積分に書き換えるには，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ の絶対値をかける必要がありますが，これは (x,y) を (u,v) の関数として微分した量ですから，この向きで書くべきです．

質問： 多変数関数の積分のときにヤコビアンに絶対値がつく理由がよく分かりました． **お答え：**はい．

質問： 1 変数関数の積分では積分の向きを考えるのはなぜなのですか．

お答え： $a > b$ のとき $\int_a^b$ を考えたいから（講義ノート 67 ページ）．たとえば，$\mathbb{R}$ 全体で連続な関数 f を考えて $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ とおくと，F は実数全体で定義された f の原始関数となるわけですが，“実数全体で定義” するためには $x < 0$ の場合にも積分が定義されていなければなりません．

質問： 一変数関数の積分において，方向を考えない場合があまり想像できない具体的に方向を考えている場合とどう変わるのですか．正負が変わるだけですか?

お答え： $\mathbb{R}$ の区間 $I = [a,b]$ に対して $\int_I f(x)\,dx$ と書くと，これは $\int_a^b f(x)\,dx$ のことを表します．このように $\int_I$ と書くのが “向きを考えない” 積分と思って下さい．一つ前の質問の回答で $\int_0^x f(t)\,dt$ を考えましたが，$I_x = (0$ と x を含む最小の閉区間$)$ とすれば $\int_{I_x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt\ (x \geqq 0)$, $-\int_0^x f(t)\,dt\ (x < 0)$.

質問： 積分に方向があるないというのがわかりません．3 次元でも (積分) $= -$(体積) となることはありますよね?

お答え： $D \subset \mathbb{R}^3$ で（この授業での定義通り）1 を積分すれば，値が負になることはありません．

質問： ヤコビ行列式に絶対値をつけると平面上の向きを考えなくてよくなる仕組みがわかりません．

お答え： 平面の向きを考えていないので，絶対値がつく．順番が逆．

質問： 変数変換の際にヤコビ行列の行列式に絶対値をつけることについて，授業では平面の “向き” を考えていないとおっしゃっていましたが，なぜ考えなくてよいのか分かりませんでした．理解力なくてすみません．教えて下さい．

お答え： 考えなくて “よい” かどうかは “何をしたいか” によって決まることで，ここでは単に考えていないだけ．むしろ “一変数の場合はなぜ絶対値がつかないか” ということの説明で，“一変数関数の積分は区間に向きを考えている” で向きに言及した．ここでは平面の向きをちゃんと定義してもいませんし，あまり気にしなくて結構です．

質問： 授業中の Review で，一変数の置換積分の話がありましたが，定理 12.7 は置換積分の一種と言えますか．

お答え： です，と言いませんでしたっけ．

質問： 偏微分可能でない（ヤコビアンがつくれない）変数変換はできるのでしょうか．また，それで積分はできますか．

お答え： 一変数関数の場合を考えましょう．微分可能でない関数を用いて変数変換をしたことはありますか?

質問： なぜ 2 変数の積分での変数変換はヤコビアン行列の形になる行列式をかけるのですか．

お答え： “ヤコビアン行列の形になる行列式” とは何でしょうか．

質問： 太字のベクトル ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ など) と上矢印のベクトル ($\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{OP}$) はどのような基準で使い分けていますか．

お答え： 使い分けているわけではありません．平面（空間）の 2 点 P, Q に対して，始点を P, 終点を Q とする有向線分が表すベクトルを $\overrightarrow{PQ}$ と書くのです．すなわち $\rightarrow$ は，2 つの点からベクトルをつくる “操作” を表す記号です．この講義で用いる “上矢印記号” はこの意味だけです．

質問： ベクトル $\vec{a}$ の大きさを $||\vec{a}||$ と表記しますが，これは行列 A の行列式の絶対値を $||A||$ と表記するのと関係ありますか? **お答え：**ここではベクトル $\boldsymbol{a}$ ($\vec{a}$ でない) の大きさは $|\boldsymbol{a}|$．行列式の絶対値とは直接関係ない．

質問： ヤコビ行列が $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を表していますが，そもそも何を表しているんですか．記号ではなく，できるだけ言葉でお願いします．

お答え： ヤコビ行列は $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ なんて表していません．$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ はヤコビ行列の行列式を表していて，ヤコビアンと呼ぶのです（と講義では述べた）．言葉を正しく運用するように．それができないと“言葉での説明” は理解できません．

質問： 最後の Example で $2\iint_{E'}\sqrt{1-v^2-u^2}\,dv\,du$ で $E'=\{(u,w)\,|\,u^2+w^4\leqq 1\}$ は $u=0$ を代入した値ですか?

お答え： 書かれている式がむちゃくちゃな気がします．E' は集合ですから，値ではありません．

質問： Jacobi 行列で $(u,v)\mapsto\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ と変換するとき，係数が $\frac{\partial u}{\partial x}$ か $\frac{\partial x}{\partial u}$ か迷うのですが，覚え方はないですか． **お答え：**積分の変数変換の公式ならば，分母と分子の変数を見ればすぐにわかるはず．いずれにせよ“正しい式を見ながら計算を何回かやる” ことで，すぐに覚えられます．その手間を省いてはだめ．

質問： 変数変換を上手にできるようになるには，やはりなれなのでしょうか． **お答え：**そうですね．

質問： ヤコビアンのヤコビさんはドイツ人ですよね． **お答え：**Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851, ドイツ)

質問： TEX で ∂ を入力するとき `\partial` と打ち込みました．ラウンドディーとかいう名前はどこへいったのですか．

お答え： だから一般的な読み方ではないんでしょうね．“partial” は偏微分 partial differential から来ています．

質問： 重積分を計算するときにグラフが対称となっている関数は「グラフより」とかいて計算を簡単にしてもいいですか．

お答え： 計算を簡単にするのはよいのですが「グラフより」という書き方は気に入りません．“グラフのどの性質から来ているか” ということを明示せずに“空気読め” と言っているような気がするからです．“被積分関数は x に関して偶関数だから” などともうすこし明示的な言い方をした方がよいと思います．

質問： 書き方の質問です．$\int_0^1\int_0^1 f\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^1 dx$ でいいですか? **お答え：**はい (6 月 11 日に説明した)

質問： $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の大きさが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積だということは習ってなくて知らないので教えてくれますか． / 頂点が P, Q, R, S の平行四辺形の面積が $|\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})|$ であるという理由がわかりません． / 平行四辺形の面積が行列式の絶対値になったところが理解できなかった． **お答え：**講義ノート 83 ページ，補題 12.5.

質問： ある写像のヤコビ行列を J としたとき逆写像のヤコビ行列はなぜ J の逆行列となるのですか?

お答え： 講義ノート 43 ページ，命題 6.8.

質問： 教科書の 94 ページの問 6，$D: x^2+y^2\leqq a^2$ $(a>0)$，$I=\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$．どうして $\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$ が $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot r\,dr$ になるんですか．

お答え： ほぼ同じ問題を講義でやりました．$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$．$\theta$ の範囲を，講義では $[-\pi,\pi]$ としていますが，教科書では $[0,2\pi]$ としています．それ以外は違いがないはずですので，講義でやった計算を真似てごらんなさい．

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_E f\big(f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv$ のところで，なぜ変数変換するときに $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ というヤコビアンの行列式（山田注：ヤコビアンのこと．ヤコビ行列の行列式をヤコビアンというのです）をかけてやらなければならないのでしょうか．

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_E f\big(f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv$ でどうして $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ をかけるのでしょうか．

お答え： ということを授業で説明しました．

質問： Jacobian の行列式の図形的意味を教えて下さい． **お答え：**“Jacobian の行列式” は変．

質問： ヤコビ行列の行列式 = 面積比がよくわかりません． **お答え：**これを 7 月 9 日の講義で説明した．

質問： ヤコビ行列が何を示しているのかわかりません． **お答え：**“示す” より“表す” が適切と思います．

質問： 結局最後の答は何なんですか． **お答え：**教科書 119 ページ，問題 3 (3) です．

質問： ある関数の原始関数を初等関数で表すことができないという証明はどのように行われるのでしょうか．大まかに説明可能でしたら教えて下さい．また，初等関数で表すことができないというのはどうやったら判別可能ですか．

お答え： 大まかには難しいです．講義資料 11，5 ページ参照．リウヴィル (Liouville)，リッシュ (Risch)，微分ガロア理論などで検索してみると面白いかも．

質問： 平均点を教えてくれないのはなぜか教えて下さい． **お答え：**基本的に満点をとってもらいたい試験なので，平均より上・下ということが何の指標にもならないから．“平均点より上” とおもって安心してほしくない．

質問： 大学の先生に夏休みはあるのでしょうか．あるなら山田先生は夏休みをどのように過ごす予定ですか．

お答え： 講義と教授会がないだけで，長い休みはありません．定期試験/出張講義 (佐賀)/ 出張（ウィーン）/ 大学院入試/シンポジウムと 8 月はイベントいっぱい．その間に，学期中にできない勉強をしなければいけませんね．9 月になると会議も戻ってくるし，大学改革関係の仕事はあるし，学会はあるし . . .

質問： 何やってたんですか? **お答え：**重積分の変数変換.