2013 年 7 月 23 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 13

お知らせ

- 今回で「微分積分学第一」の講義は終了です．ご聴講ありがとうございました．様々な不手際でご迷惑をおかけいたしましたが，お赦しいただければ幸いです．
- 来週 7 月 30 日に定期試験を行います．予告は中間試験の答案についている通りですが，とくに試験会場が通常の講義・中間試験と異なりますのでご注意ください．
- 科目ごとにいちいちお手数をおかけして申し訳ないのですが，「授業評価アンケート」を実施します．ご協力お願いいたします．入り口で配布した用紙に記入して$\boxed{}$さんにお渡しください．なお，授業科目コードは **1008** です．
- 後期「微分積分学第二」の概要などは，夏休み中に講義 web ページ，OCW に公開いたします．

前回までの訂正

- 講義ノート 90–91 ページ：式番号の引用 (1.1) ⇒ (14.1).
- 講義ノート 90 ページ下から 3 行目：$E_a \subset I_a \subset E_{\sqrt{2}a} \Rightarrow E_a \subset D_a \subset E_{\sqrt{2}a}$
- 講義ノート 91 ページ，下から 7 行目：左括弧が一つ余計.

授業に関する御意見

- うるさいですね． **山田のコメント：** まったくです．施設部は講義中は工事はしないと言っていたんですが，騙された感じ.
- 工事の人に怒ってないです... **山田のコメント：** 私もですが，指示をだしている人に怒っています.
- やはり講義妨害以上に嫌なことはありませんか． **山田のコメント：** いろいろありますけど...
- 先生の質問用紙の答えが汚すぎて読めません． **山田のコメント：** プリントの方を見て下さい.
- 後期は違う先生に微積分を教えてもらいたい． **山田のコメント：** なんで?
- 気がついたら用紙がしわくちゃでした． **山田のコメント：** ざんねん.
- 3 ヵ月お世話になりました．（もしかしすると後期も先生は同じですか？）この紙のおかげではりあいがありました．最後に先生のおすすめの TEX の入れ方は何ですか． **山田のコメント：** ありがとう．申し訳ないが後期も山田です．TEX は Ubuntu.
- いろいろとおもしろそうです． **山田のコメント：** 何が？
- 今回の範囲はわかり易かった **山田のコメント：** そう?
- クーラー（エアコン）なき授業はきつすぎます． **山田のコメント：** だから回復まで待ちました.

特別講義に関する質問と回答

質問： 6 月 25 日の講義で八木アンテナはなくなったというようなことが言われていたが，少なくとも自分が見ている世界では普通に多くの家の屋根の上についているし，21MHz や 28MHz では八木アンテナと呼ばれる別のものが使われている．どういうことだろうか．自分に見えているのは「八木・宇田アンテナ」なのだろうか.

回答： なくなったといったつもりはありません。最近はマンションに光ケーブルが引かれることが多いので，家の屋根に少なくなったといっただけです。見えているのは八木アンテナです．（廣川先生）

質問： 特別講義について質問します．広川二郎先生に質問です．ラジアルラインスロットアンテナはなぜ地上の通信にはあまり使われないのですか?

回答： 講義で見せたラジアルラインスロットアンテナは，衛星通信で使われるアンテナで 8GHz とか 12GHz の電波でしかも宇宙からの微弱な信号を受信するために使っています。地上の通信ではたとえばデジタルテレビは 0.5GHz とか携帯電話では 2GHz の電波で，周波数が低くなった分大きさが大きくなるのと，地上通信では衛星通信に比べると電力が強いので，あまり使われていません．（廣川先生）

質問： ずっと前の質問なのですが，中間テスト後の特別講義では 2 人とも電気電子工学科から来たと思いますが，情報工学で微積はどのように使われるのでしょうか.

回答： 廣川先生は電気電子工学科ですが府川は情報工学科に属しています.
情報工学科では (1) 通信分野において，確率現象の確率を計算する際に微分積分学のテクニックを用います．例として，雑音やフェージングの確率密度関数の計算があり，詳細は府川の特別講義資料を見てください．(2) 人工知能などの推定や推論における最適化問題（評価関数を最大もしくは最小にするパラメータを求める問題）においても，微分積分学のテクニックを駆使します．（府川先生）

質問と回答

質問： $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx$ のところで，$\frac{1}{2}(\log\varepsilon_1-\log\varepsilon_2+\log(2-\varepsilon_1)-\log(2-\varepsilon_2)$ が $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=2\varepsilon$ だと発散するということでしたが，$\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=2\varepsilon$ のときは，$\frac{1}{2}(\log\varepsilon_1-\log\varepsilon_2+\log(2-\varepsilon_1)-\log(2-\varepsilon_2)=\frac{1}{2}\log\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{2\varepsilon(2-2\varepsilon)}=\frac{1}{2}\log\frac{2-\varepsilon}{4-4\varepsilon}$ で $\varepsilon\to 0$ のとき，$\frac{1}{2}\log\frac{2-\varepsilon}{4-4\varepsilon}\to\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ とならないのですか?

お答え： “$\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=2\varepsilon$” のときは**別の値に近づく**です．何と別かというと “$\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=\varepsilon$” の場合と，です.

質問： $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx$ は被積分関数が奇関数であっても $=2\int_{0}^{1}\frac{x}{1-x^2}dx$ としてはいけないのは理解しましたが，$\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{1-x^2}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx$ としてもいけないのでしょうか.

お答え： “奇関数であっても” という文脈なら 2 倍になるのではなく 0 になるのでは? ご質問の後半の等式は，右辺の 2 つの項がいずれも発散する広義積分で，“$\infty-\infty$” の形の不定形となるので，右辺の “値” は意味がありません.

質問： $\displaystyle\lim_{\varepsilon_1\to+0,\varepsilon_2\to+0}\frac{1}{2}\{(\log\varepsilon_1-\log\varepsilon_2)+\log(2-\varepsilon_1)-\log(2-\varepsilon_2)\}$ 発散とありましたが，$\varepsilon_1=\varepsilon_2$ である際の場合分け (0 に収束) はしてはいけないのですか?

お答え： なぜそれだけ特別扱いするのでしょう．正の定数 a に対して $\varepsilon_1=a\varepsilon_2$ としてやれば，極限値は $\frac{1}{2}\log a$．特別扱いしない，という立場でこの極限は発散する，といいます.

質問： $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx$ に関して，$\int_{-1}^{0}\frac{x}{1-x^2}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\{(\log\varepsilon_1-\log\varepsilon_2)+\log(2-\varepsilon_1)-\log(2-\varepsilon_2)\}$ 発散とすることが多いとありましたが，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ とするときに出る値とはどのような意味をもつのでしょう.

お答え： 発散とすることが多いのではなく発散する．値は，（ひとつの）特別な近づけ方をした極限値.

質問： $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx=\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\frac{x}{1-x^2}\,dx$ で $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0,0)$ とするとき $\varepsilon_1=\varepsilon_2\to+0$ とは必ずしもならないから，$\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$ であるとはいわないとのことだが，ε_1 と ε_2 の収束の速さが違う場合をわざわざ考慮する意義が理解できないので教えて下さい.

お答え： ご質問の最初の積分の右辺は lim が抜けていますね．次のような問題を考えましょう:

- ε_1, ε_2 を独立変数とする次の二変数関数 f の $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(+0,+0)$ としたときの極限値を求めよ.

$$f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\frac{x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\bigl(\log\varepsilon_1-\log\varepsilon_2+\log(2-\varepsilon_1)-\log(2-\varepsilon_2)\bigr).$$

- $g(x,y)=\frac{1}{2}\bigl(\log x-\log y+\log(2-x)-\log(2-y)\bigr)$ の，$(x,y)\to(+0,+0)$ としたときの極限値を求めよ.
- 二変数関数 $h(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ の $(x,y)\to(0,0)$ としたときの極限値を求めよ.

第一の問題は，考えている広義積分が収束する（極限値が存在するとき）か，発散する（極限値が存在しないとき）かを問う問題で，今回扱ったものですが，記号を変えれば第二の問題と全く同じです．第二の問題で極限値をとる際 $y=x$ とおいて $x\to 0$ とするのは普通でしょうか．第三の問題は講義ノート例 3.9. (x,y) を $(0,0)$ に近づける方法によって $h(x,y)$ が様々な値に近づくので極限値が存在しない．第一の問題だけ特別に $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\varepsilon,\varepsilon)$ とするのはむしろおかしいのではありませんか?

質問： $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx$ は $\frac{x}{1-x^2}$ が奇関数なのですぐ 0 にしてよかったと思います．面積で考えればやっぱり 0 になると思うのですが，どう考えたら発散なのですか?

お答え： $0\leqq x<1$ の部分，グラフの下側の面積は無限大．$-1<x\leqq 0$ の部分，グラフの上側の面積は無限大．だから，この積分は $\infty-\infty$ の不定形となる．面積で考えて “やっぱり” と思えるのはなぜ? そちらの方が疑問です.

質問： 奇関数だからといって $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$ としてはいけないと教わりましたが，偶関数だから $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ とするのは問題ないのですか?

質問： $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ としていましたが，$f(x)$ が偶関数のとき，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ は一般に成り立ちますか.

お答え： 積分が発散する場合は問題があります．収束する場合は問題がないです．実際，$\int_{-M_1}^{M_2}e^{-x^2}\,dx=\int_0^{M_1}e^{-x^2}\,dx+\int_0^{M_2}e^{-x^2}\,dx$ ですが，右辺の 2 つの項は $(M_1,M_2)\to(+\infty,+\infty)$ のときに同じ値 $\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ に収束する．また，被積分関数が非負のときは，$\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ が発散するときは $+\infty$ に発散するので，微妙なことはおきずに $+\infty=+\infty$ の意味でご質問の等式は成立します.

質問： 広義積分の収束判定（事実 13.4）ははさみうちの原理と同じことですか.

お答え： 高等学校でならった“はさみうちの原理” のことだとしたら，違います．それは $f(x)\leqq g(x)\leqq h(x)$ かつ $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=b$ と f, h が**同じ値**に収束するならば，g もその値に収束する，ということ．事実 13.4 では $0\leqq f(x)\leqq g(x)$ という状況のもと，g の積分が 0 であることは要求していないので，両方から同じ値ではさみうつ，という状況にはなっていません．実際，g の積分と f の積分の値が一致するとは限りません.

質問： 広義積分の考え方を使って求めた値は通常の積分の値と異なる場合はありますか? この考え方を知っていれば高校の時もっといろんな積分が解けたような気がするのですが.

お答え： 通常の（意味不明．講義ノート 9 節の意味とする）積分がうまく定義できないケースを広義積分といいますので，質問はナンセンスです．“積分が解ける” という言い回しには違和感があります．“積分が求まる” では？

質問： 広義積分は積分の範囲が閉区間 → 開区間になったということですよね．（と聞こうとしたら大体同じことが広義ノートに...）でも大学に入る前に「積分の端点は気にしない」と聞いたような気がするのですが，この講義を受けないとそうはできないはずだったということでしょうか.

お答え： 端点を気にしないのは被積分関数が端点で有界なとき．広義積分はそうでないケースを扱っています.

質問： 広義積分の収束を調べる際，できれば原子関数（原文ママ，原始関数のこと?）が求められるかが分かると方針をたてやすくなると思いますが，原子関数が初等関数で表すことができないことを確認する方法はただ積分を試みる以外にあるでしょうか．もしあれば教えて下さい． **お答え：**講義資料 12, 4 ページ，下から 12 行目.

質問： 第 14 回講義プリントで広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ が収束することをまず示し，その後 (中略) 挟み撃ちの原理で $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ を示していましたが，実際に $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ の値を求めろと言われたら，これがまず収束することを証明する過程は省いても問題ないですね？ **お答え：**問題ないです.

質問： $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt$ は直感的には正しいと思うのですが，数学的に厳密にやるとやはりまずいですよね． **お答え：**どこがまずいのでしょう．直観もなにもほとんど自明では?

質問： 数学を研究する人にとっては，積分の正確な値ではなく，広義積分の考え方で，積分値が収束することだけがわかれば有意義であるということですか?

お答え： 特殊関数がきまるのだから応用上も有意義．さらに，収束が分かるなら，近似値は計算できる.

質問： ガンマ関数とベータ関数があるのならばアルファ関数も存在するのですか?

お答え： この文脈の中ではないようです．もちろん，なにかの関数に α と名前をつけることはあります.

質問： ガンマ関数には階乗の拡張という意味があるようですが，ベータ関数にはどんな意味がありますか.

お答え： さまざまな意味や応用がありますが，$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ 等式を見てなにか感じませんか.

質問： 「$\Gamma(m)=m!$ m は整数（原文ママ，正の整数のことか)」を見て思ったのですが，$k!$ (k が負の整数) ってあるのですか.（あるならばその値は?)

お答え： $m!=m(m-1)!$ という関係式を満たすために $0!=1$ と決めました．そこで $m=0$ のときにこの等式を書くと，$0!=0(-1)!$, すなわち $1=0$ となり，$(-1)!$ は存在してはいけないことがわかります．したがって，負の整数の階乗は定義しません．Γ 関数の立場からいうと，定義域は正の実数でしたので，正でない整数での値は（いまのところ）未定義です．実は，Γ 関数は複素平面上に一意的に（解析的に）拡張することができる（解析接続）のですが，得られた複素関数は，正でない整数のところで値が発散する（その点に極をもつという）ことがわかります.

質問： Gamma 関数は $\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}\,dx$ がどのような値かわからないけど収束するから定義できると言っていましたが，具体的な値が分からないと実用性が見いだせないと思うのですが，どうですか?

お答え： $\sin 1$ の具体的な値はいくつでしょう（もちろん，値を覚えているというならそれはそれで立派ですが)．これがわからないとすると三角関数は実用性がないのでしょうか.

質問： $f(m)=\int_0^\infty e^{-x}x^m\,dx$ とすると（m は自然数）$f(m)=[-e^{-x}x^m]_0^\infty+mf(m-1)=[-e^{-x}x^m]_0^\infty+m[-e^{-x}x^{m-1}]_0^\infty+\dots+m![-e^{-x}]_0^\infty=m!$ でよろしいでしょうか?

お答え： よいですが $e^{-x}x^m\to 0$ $(x\to+\infty)$ は証明できますね.

質問： 板書に「$s-1\leqq m$ となる自然数 m をとる」や「$\Gamma(m)=(m-1)!$ (m: 正の整数)」という表現がありましたが「自然数」と「正の整数」を同義でないとして使い分けているのですか.

お答え： ここでは同義です．自然数に 0 を含める流儀の人もいるので，なるべく「正の整数」と書くようにしています．ご質問の最初の方は筆が滑ったような気がしますが，どちらの流儀でも支障がない議論でした.

質問： ガンマ関数の名前の由来は何ですか． **お答え：** 知りませんが，Legendre (1752–1833) によるらしいです.

質問： ずっと前から疑問だったのですが，$s\in\mathbb{N}$ ならば $\Gamma(s)=(s-1)!$ ですが，$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^x x^s\,dx$ としておけば $\Gamma(s)=s!$ できれいになると思うのですが，そうしないのは深い理由があるのですか?

お答え： よくわかりませんが，ご質問のようにしていた時期もあったらしいです（伝聞)．いまの形は，定義域が $s>0$ となる ($s>1$ でなく) というのが嬉しい（のでは？）

質問： $\int_{-1}^1\frac{x}{1-x^2}\,dx$ の積分で，積分区間を -1 から 0 と 0 から 1 に分けていましたが，両方に 0 が含まれることに問題がないのですか?

お答え： 高等学校で学んだ（広義積分ではない）積分を思い出しなさい．公式 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$（これが成り立つのは納得していてくれないと大変に困る!）の右辺の両方に c が入っているのは問題ですか？

質問： 極限値が存在しないとき発散すると言うと書いてありましたが，$\lim_{M\to 0}\int_0^M(\sin x)\,dx=\lim_{M\to 0}[-\cos x]_0^M=\lim_{M\to 0}(\cos M)+1$ の様に一定の範囲内にあるときも発散と言って良いのですか．それとも振動などの他の言い方があるのですか． **お答え：** 一番右の極限を計算すると 2，一番最初の極限は 0．どこかで計算間違いをしていますが，収束です．たぶん $M\to 0$ でなく $M\to\infty$ ですね．このとき，広義積分 $\int_0^\infty\sin x\,dx$ は発散する，といいます．“収束しないとき発散という”ということは高等学校の教科書にも（数列の場合に）書いてあります.

質問： $\varepsilon\to+0$ のように，小さい数を表現するときに ε を使う習慣があるとおっしゃっていましたが，$M\to+\infty$ のように大きい数では M を使う習慣があるのですか． **お答え：** そんな気もしますが，ε 程一般的でないと思います.

質問：「広義積分」は「異常積分」というと教科書にありますが，何が異常なのですか.

お答え： Improper または singular の訳語だと思いますが，“積分区間の端点で関数が定義されない”ということです.

質問： $\int_-^\infty$ などの表記を使うテキストや先生がいますが，結局僕らは $\lim_{n\to\infty}\int_0^n$ のように細かく表記したほうがよいのでしょうか? 良いという先生と駄目という先生がいてどれが正しいのかわかりません.

お答え： 駄目という先生がいるんでしょうか．広義積分の記号 $\int_0^\infty$ はかなり一般的ですので，こう書くことには問題はありません．ただ，この積分はご質問のように極限で定義されているもの，ということを忘れてはいけません.

質問： 事実 13.4 の逆 (?)：$\int_a^b f(x)\,dx$ が収束する $\Rightarrow$ $f(x)\leqq g(x)$ で $\int_a^b g(x)\,dx$ が収束する $g(x)$ が存在する，はいえるのでしょうか? **お答え：** $g(x)=f(x)$ とすればよい.

質問： 半開区間ではなく開区間で定義されているときも広義積分をしますか． **お答え：** 例 13.3, 例 13.6 ($p,q\in(0,1)$).

質問： $\varepsilon\to+0$ のときはもともと定義されているけれど $\varepsilon\to-0$ のときは定義されいないときも同じようにできますか? **お答え：** 何がですか?

質問： 講義ノート 6 の $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ が 0 に収束した時発散してしまうのが納得しにくいです.

お答え： 講義ノート 6 とはどこのことでしょう．納得しにくいのでどうしてほしいのでしょう.

質問： ガンマ関数について，どうして $\Gamma(s)=s\Gamma(s)$ となるのですか? **お答え：** 左辺は $\Gamma(s+1)$．部分積分による.

質問： 一般人は log のことを 10g と思ってしまうとおっしゃっておられましたが，先生の言う一般人とはどのような人たちをさすのでしょうか． **お答え：** 山田が経験していたのは，昔つとめていたところの事務職員.

質問： 授業中 log を一般人は 10g と勘違いするとおっしゃっていましたが，それは字が汚いだけでは? **お答え：** 自分が勘違いされた具体的なケースでは，ワープロ原稿を書きなおす，という無駄なことをやられて，間違えられた.

質問： 先生はプリントを作るとき tef で書いているのですか? 何分くらいかかりますか．ぼくはパソコンが苦手なのでできる気がしません． **お答え：** tef は使っていません．TeX を使っています．講義資料 3, 6 ページ参照.

質問： 単位をとるための必勝法を，できるだけたくさん教えて下さい． **お答え：** 試験で合格点をとる．中間試験・提出物の得点は確定していますから，今からコントロールできるのは定期試験の得点だけ.

質問： 講義の開始は遅れましたけど，終了時間は通常通りでしたね．なんとなく得した気分です． **お答え：** 損では?

質問： 授業時間が短くなった分，その分の補講をしなくてもいいのでしょうか.

お答え： 学生さんが出席でき，山田が空いている時間に教室を確保して. . . は，スケジュール的に無理だと思います.