山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 計算・下書きには解答用紙の裏面・余白をご利用ください. ただし, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 8 月 5 日から 9 日の間, **数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却いたします.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, **8 月 9 日まで**に山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.
- 成績は, 定期試験・中間試験・毎回の提出物のみから決定されます. ご了承ください.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{20}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい. [35 点]

uv 平面上の領域 $D = \{(u,v) \mid v > 0\}$ で定義された 2 つの 2 変数関数

$$(*) \qquad x = x(u,v) = u + \frac{1}{2}v^2, \qquad y = y(u,v) = u - \frac{1}{2}v^2$$

を考えると, x の偏導関数は $\boxed{1}$, y の偏導関数は $\boxed{2}$ と u, v の具体的な式で表される. 対応 $(u,v) \mapsto (x,y)$ は領域 D を xy 平面上の領域 $D' = \{(x,y) \mid x - y > 0\}$ に 1 対 1 に写す. とくに逆の対応 $(x,y) \mapsto (u,v)$ を $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ と書いておく. このとき xy 平面上の領域 D' で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して $\tilde{f}(u,v) = f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ とおくと, チェイン・ルールから

$$\tilde{f}_u = \boxed{3} f_x + \boxed{4} f_y, \qquad \tilde{f}_v = \boxed{5} f_x + \boxed{6} f_y$$

が成り立つ. また $f(x,y) = \tilde{f}\bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr)$ なので, この偏導関数は

$$f_x = \boxed{7} \tilde{f}_u + \boxed{8} \tilde{f}_v, \qquad f_y = \boxed{9} \tilde{f}_u + \boxed{10} \tilde{f}_v$$

を満たす*. さらに微分して*

$$f_{xx} = \boxed{11} \tilde{f}_{uu} + \boxed{12} \tilde{f}_{uv} + \boxed{13} \tilde{f}_{vv} + \boxed{14} \tilde{f}_u + \boxed{15} \tilde{f}_v,$$

同様に $f_{xy} = \boxed{16}$, $f_{yy} = \boxed{17}$ が成り立つ.

いま, $f(x,y)$ に (x,y) に関するラプラシアン Δ を施して得られる関数を $g(x,y) = \Delta f(x,y)$ とすると, $g\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) = \boxed{18}$ のように $\tilde{f}$ の u, v に関する偏導関数, 2 次偏導関数と, (u,v) の関数を用いて表される.

とくに $\tilde{f}(u,v) = F(v)$ の形で表される関数 $\tilde{f}$ に対して $f(x,y) = \tilde{f}\bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr)$ が調和関数ならば $F(v) = \boxed{19}$ と v の式を用いて表されるが, これに対応する (x,y) の関数は $f(x,y) = \boxed{20}$ となる.

裏面につづく

* $\boxed{3}$ – $\boxed{15}$ には u, v の具体的な式が入る.

問題 B 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 9\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [30 点]

等式 $\sinh\alpha = 1$ を満たす実数 α の値は $\boxed{\ 1\ }$ で，この α に対して $\cosh\alpha = \boxed{\ 2\ }$ である．
以下，問題 B を通して $\alpha = \boxed{\ 1\ }$ とする．
$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$F(x,y) = \cosh^2 x + 4\sinh x \sinh y + \cosh^2 y - \boxed{\ 3\ }$$

は $F(\alpha,\alpha) = 0$ を満たしている．この関数の F の 1 次偏導関数は $\boxed{\ 4\ }$ である．
時刻 $t = 0$ で点 $P = (\alpha,\alpha)$ を通る直線（運動）

$$(*) \qquad \bigl(x(t), y(t)\bigr) = (\alpha + pt, \alpha + qt) \qquad \bigl(p,\, q \text{ は定数で } (p,q) \neq (0,0)\bigr)$$

に対して $f(t) := F\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ とおくと，$f(t)$ の $t = 0$ における微分係数は $\boxed{\ 5\ }$ と p, q を用いて表される．とくに，位置 (x,y) における標高が $F(x,y)$ で表されるような地形を直線 $(*)$ にそって歩く人が，点 P を通過したときに坂を下っているのは p, q が条件 $\boxed{\ 6\ }$ を満たしているときである．
次に，集合

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}, \qquad L' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0, x + y > 0\}$$

を考えると，L' は，C^∞-級の関数 g のグラフ $y = g(x)$ と表すことができ，L は L' と，L' を直線 $x + y = 0$ に関して対称移動して得られる曲線の合併集合である（ということは既知として用いてよい）．とくに $g(\alpha) = \boxed{\ 7\ }$, $g'(\alpha) = \boxed{\ 8\ }$, $g''(\alpha) = \boxed{\ 9\ }$ と具体的な数値で求めることができる．

問題 C 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 10\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [25 点]

xy 平面の部分集合 $E = \bigl\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\bigr\}$ に対して

$$I := \iint_E \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} dx \int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dy$$

と，累次積分で表すことができる．この右辺の累次積分のうち，最初のもの (y に関する積分) を実行すると，

$$I = \int_{\boxed{5}}^{\boxed{6}} \boxed{\ 7\ }\, dx$$

が得られる．ただし $\boxed{\ 7\ }$ には x の具体的な式が入る．
一方，変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと，

$$I = \iint_D \boxed{\ 8\ }\, dr\, d\theta, \qquad (D = \boxed{\ 9\ })$$

となるが，右辺の積分は容易に計算できて，$I = \boxed{\ 10\ }$ が得られる．

問題 D 正の実数 α が $0 < \alpha < 2$ を満たしているとき，次の広義積分は収束するか．理由をつけて答えなさい [10 点]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

問題 E [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください．

おつかれさまでした ♡♡

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–2:5 点，3–6:5 点, 7–10:5 点, 11–15:5 点, 16–17:5 点, 18: 5 点，19–20:5 点

1 $x_u = 1, \quad x_v = v$	2 $y_u = 1, \quad y_v = -v$

3 1	4 1	5 v	6 $-v$
7 $\dfrac{1}{2}$	8 $\dfrac{1}{2v}$	9 $\dfrac{1}{2}$	10 $-\dfrac{1}{2v}$

11 $\dfrac{1}{4}$	12 $\dfrac{1}{2v}$	13 $\dfrac{1}{4v^2}$	14 0	15 $-\dfrac{1}{4v^3}$

16 $\dfrac{1}{4}\left(\tilde{f}_{uu} - \dfrac{1}{v^2}\tilde{f}_{vv} + \dfrac{1}{v^3}\tilde{f}_v\right)$	17 $\dfrac{1}{4}\left(\tilde{f}_{uu} - \dfrac{2}{v}\tilde{f}_{uv} + \dfrac{1}{v^2}\tilde{f}_{vv} - \dfrac{1}{v^3}\tilde{f}_v\right)$

18 $\dfrac{1}{2}\left(\tilde{f}_{uu} + \dfrac{1}{v^2}\tilde{f}_{vv} - \dfrac{1}{v^3}\tilde{f}_v\right)$	19 $av^2 + b$ (a, b は定数)	20 $a(x-y)+b$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 7–10: u, v の式でなければ不正解．ただし，ここを x, y で書いて，11 以降もそのまま正解しているならば，11 以降は正解．
- 7–10: 並べ方を間違えた人がいる．この場合，11–15 が正解なら，7–10 にも 5 点与えている．
- 20: この関数が調和関数かどうかはすぐにわかるはず．たとえば $\sqrt{x-y}$ が入っていたら間違い．

満点 11 名

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–3:5 点，4:5 点, 5–6:5 点, 7–9:各 5 点

1 $\log(1+\sqrt{2})$	2 $\sqrt{2}$	3 8
4 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\cosh x\bigl(\sinh x + 2\sinh y\bigr), \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2\cosh y\bigl(\sinh y + 2\sinh x\bigr)$		
5 $6\sqrt{2}(p+q)$	6 $p+q<0$	
7 $\alpha = \log(1+\sqrt{2})$	8 -1	9 $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 1: $\log(1\pm\sqrt{2})$ は誤り（マイナスの方は実数にならない）
- 5, 6: あわせて 5 点．6 の不等号（下り坂）に注意.
- 9: いろいろな計算の仕方があるかもしれないが，$y=g(x)$ とおくと

$$y' = g'(x) = -\frac{\cosh x(\sinh x + 2\sinh y)}{\cosh y(\sinh y + 2\sinh x)}$$

を対数微分して，

$$\frac{g''(x)}{g'(x)} = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\sinh y}{\cosh y}y' + \frac{\cosh x + 2y'\cosh y}{\sinh x + 2\sinh y} - \frac{\cosh y y' + 2\cosh x}{\sinh y + 2\sinh x}.$$

この両辺に $x=\alpha$ を代入して $y'=g'(\alpha)=-1$, $\cosh\alpha=\sqrt{2}$, $\sinh\alpha = 1$ に注意すれば簡単に求まる.

満点 4 名

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：1–4:5 点，5–7:10 点，8–9:5 点，10:5 点

1	2	3	4
-1	1	$-\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1-x^2}$

5	6	7
-1	1	$\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

8	9	10
$\dfrac{r}{1+r^2}$	$\left\{(r,\theta)\,\middle\vert\, 0 \leqq r \leqq 1, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\right\}$	$\pi \log 2$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 5,6,7 は全部正解で 10 点．5,6 が書いてあっても 7 が空白んあら得点は与えていない．ただし，5,6 が正解，7 の誤答が記入されていて，さらにその誤答が $\tan^{-1}$(x の定数出ない関数) を含んでいるならば 5,6,7 で 5 点を与えている．(この手の積分に $\tan^{-1}$ が現れるのはすぐわかるはずなので)
- $\tan^{-1} a - \tan^{-1}(-a) = 2\tan^{-1} a$ （逆正接関数は奇関数）に気づいていない人多数（原点はしていない）
- 9 は，問題文の 1 行目 $E = \{(x,y) \mid \dots\}$ と同じ形式で書くのが最も "宛てはまっている" と思う．(減点はしていない)

満点 12 名

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 10 点

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ とおく．

- 区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で $\sin x \geqq 0$ だから，この区間で $f(x) \geqq 0$.
- 区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で $\sin x \leqq x$ である．実際 $\varphi(x) := x - \sin x$ とおくと，$\varphi'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ なので，$x \geqq 0$ ならば $x - \sin x = \varphi(x) = \varphi(0) \geqq 0$. したがって，この区間で $f(x) \leqq x^{1-\alpha}$ である．
- $\alpha \in (0, 2)$ ならば $2 - \alpha > 0$ なので，十分小さい正の実数 ε に対して

$$I_\varepsilon := \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} x^{1-\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{2-\alpha}x^{2-\alpha}\right]_{x=\varepsilon}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2-\alpha}\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha} - \varepsilon^{2-\alpha}\right\}$$
$$\to \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha} \qquad (\varepsilon \to +0)$$

である．

以上より，負でない関数 f は，区間 $[0, \pi/2]$ で広義積分が収束するような関数 $x^{1-\alpha}$ 以下なので，与えられた広義積分は収束する．

計算スペース（採点の対象にはしません）

- $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha} \leqq \dots$ というような式が "収束を言う" まえにあるのは不正解なはずです．実際，この値があるかどうか分からないのに等式や不等式で変形することはできません．
- たとえば $\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \leqq \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ だけの議論では不足です．講義ノートの事実 13.4 を用いるなら，積分するまえの被積分関数の大小を比較する必要があります．さらに負でないことも確認すべきです．
- 被積分関数の極限が存在するから収束，という議論は大体正しいのですが，"連続関数に拡張できて，連続関数の積分可能性から..." とすべきです．
- 被積分関数が発散するので積分が発散というのは全く誤りです．$\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ という例をやったはずです．

満点：3 名

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2013 年度入学の方は，学籍番号のうち “13_” を除いた番号の席に着席してください．
- 2012 年度以前入学の方，および科目等履修生の方，ご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- **解答用紙 5 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名