1　多変数関数

1.1　1 変数関数（復習）

高等学校で学んだ微分・積分は，関数に対する操作であった．

一般に（ある範囲の）数 x に対して，ひとつの数 $f(x)$ を対応させる対応の規則 f を（1 変数）**関数** a function[1] という．このとき，考える x の範囲を関数 f の**定義域** the domain，値 $f(x)$ として想定している数の範囲を f の**値域** the range という．また，x が関数 f の定義域全体を動くとき，値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の**像** the image とよぶ．

■実数の集合と区間　関数の定義域，値域，像を表現するために集合の言葉を復習しておく．数学的な対象のあつまりを**集合** a set という．これでは何が集合かがきちんと判別できないが，この授業で扱う範囲では，対象がきちんと述べられるのでとくに曖昧になることはないはずである．

実数 real numbers 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く[2]．実数の概念を数学的に満足な形で書き表すのは易しくないが，それは後期の授業に先送りし，ここでは**数直線上にめもることができる数**という程度の理解でとりあえず先に進もう．

一般に対象 x が集合 X の**要素** an element であるということを “$x \in X$” と表す．たとえば “$x \in \mathbb{R}$” とは “x は実数全体の集合の要素” すなわち “x は実数” であることを表している．

集合 X のいくつかの要素を集めて得られる集合を X の**部分集合** a subset という．もう少し正確に述べると，

> 集合 Y が X の部分集合である，とは Y の任意の要素 an arbitrary element が X の要素となっていることである．

集合 Y が X の部分集合であることを，記号 $Y \subset X$ で表す[3]．すなわち

$$Y \subset X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{“}y \in Y \text{ ならば } y \in X\text{”}$$

2013 年 4 月 9 日 (2013 年 4 月 16 日訂正)

[1]かんすう.「函数」と書くこともある．語源からすればこれが正しいのかも知れない．

[2]太字の “R”．印刷では “$\boldsymbol{R}$” と書くこともある．

[3]高等学校の教科書では，このことを $Y \subseteqq X$ と書くことが多いが，それ以外の業界では $Y \subset X$ と書くのが多数派のようである．ここでの用法では $X \subset X$ は正しい．

である[4]．

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合，すなわち実数の集合で，数直線上のひと続きの部分を表しているものを**区間** an interval という．区間には次のようなものがある：

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqq b\},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x \leqq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x < b\},\\
(-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}, & (-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqq a\},\\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}, & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqq a\},\\
(-\infty,+\infty) &= \mathbb{R}, & [a,a] &= \{a\}.
\end{aligned}$$

ただし a, b は $a < b$ を満たす実数である．とくに (a,b) を**開区間** an open interval, $[a,b]$ を**閉区間** a closed interval という[5] [6]．

■ 1 変数関数の例

例 1.1. 実数 x に対して実数 x^2 を対応させる対応の規則にいま f という名前をつけると，“f は定義域を $\mathbb{R}$，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である” と考えることができる．引用符で囲んだ部分のことを

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

と書く．また，“f は x を x^2 に対応させる” ということを

$$f\colon x \longmapsto x^2, \qquad f(x) = x^2$$

と書く．この 2 つの矢印の使い分けは，数学の業界ではほぼ標準的である．

この関数 f によって $\star$ に対応する値（数）が $f(\star)$ である：

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(a) = a^2, \quad f(s) = s^2, f(x^2-1) = (x^2-1)^2.$$

[4]記号 “$\Leftrightarrow$” は “であるための必要十分条件は” と読む．

[5]開区間の括弧は他の記号と紛らわしいかもしれない．それを避けるために (a,b) のことを $]a,b[$ などと書く場合もある．しかし，文脈で意味が確定するのでここでは丸括弧を使うことにする．

[6]無限大 $\pm\infty$ は実数ではないので，たとえば $(0,+\infty]$ という表記はない．

関数と関数の値の違いに気をつけよう．

ここで x が実数全体を動くと，その値 $f(x)$ は負でない実数全体を動く．したがって f の像は $[0,+\infty)$ となる[7]．

例 1.2.
- 実数 x に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 -1 に対して平方して -1 になる実数は存在しないから，この対応は関数とみなすことはできない．
- 負でない実数[8] x に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 4 に対して平方して 4 になる実数は $+2$ と -2 のふたつがあるから，この対応は関数とみなすことはできない．
- 負でない実数全体の集合 $[0,+\infty)$ の各要素 x に対して，「平方して x になる負でない実数」はただひとつ存在する．これを $\sqrt{x}$ と書くことにすれば，$f\colon x \mapsto f(x)=\sqrt{x}$ は $[0,+\infty)$ を定義域にもつ関数である．

この授業で扱う 1 変数関数は，主に定義域が $\mathbb{R}$ の区間，あるいはそれらの有限個の合併集合であるようなものである．

例 1.3. (1) 開区間 $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ の要素 x に対して x の正接 $\tan x$ を対応させる規則 f_1 は，定義域を I，値域を $\mathbb{R}$ とする関数で，f_1 の像は $\mathbb{R}$ である．

(2) 0 でない実数 x に対して $f_2(x)=\frac{1}{x^2}$ を対応させる規則 f_2 は

$$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

を定義域とする関数で[9]，その像は $(0,+\infty)$ である．

関数は一本の式で表されるとは限らないし，数式で表されている必要もない．

例 1.4. (1) 実数 x に対して，実数 $f_3(x)$ を

$$f_3(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0\text{ のとき})\\ 0 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$

[7] ここでの “像” のことを “値域” という場合もあるがこの講義では例 1.1 のように “像” と “値域” を使い分ける．

[8] すなわち $x\geqq 0$ を満たす x (a nonnegative real number)．“正の実数 a positive real number” は $x>0$ を満たす x．

[9] 記号 “$\cup$” は合併集合を表す．

と定めると $f_3\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ である．

(2) 実数 x に対して，実数 $f_4(x)$ を

$$f_4(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}+2x & (x\neq 0\text{ のとき})\\ 0 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$

と定めると $f_4\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ である．

(3) 実数 x に対して，実数 $f_5(x)$ を

$$f_5(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ が有理数 a rational number のとき})\\ 0 & (x\text{ が無理数 an irrational number のとき})\end{cases}$$

と定めると $f_5\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ である．

1.2 多変数関数

■記号 正の整数 n に対して，n 個の実数の組全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と書く：

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\,|\,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}.$$

たとえば $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\}=\{(x,y)\,|\,x,\,y\text{ は実数}\}$$
$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,\,y,\,z\text{ は実数}\}$$

である．とくに $\mathbb{R}$ は数直線，$\mathbb{R}^2$ は座標平面，$\mathbb{R}^3$ は座標空間とみなすこともできる．集合 $\mathbb{R}^n$ の要素のことを $\mathbb{R}^n$ の**点** a point と呼んだりする．

■多変数関数 集合 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D 上の各点 $(x_1,\dots,x_n)$ に対して実数 $f(x_1,\dots,x_n)$ を対応させる規則 f を D 上で定義された (n 変数) **関数**，D を f の**定義域**という[10]．とくに $n\geqq 2$ の場合を**多変数関数** といい，1 変数

[10] この授業では D としてあまり変な部分集合は考えない．D を $\mathbb{R}^n$ の “領域”（ちゃんとした定義のある言葉である）とするのが妥当だが，その定義を述べるのにはすこし手間がかかるので，いまはあまり気にしないことにする．第 3 節，およびテキスト 7 ページ，脚注 4 参照．

関数と区別する．第 1.1 節と同様に，“f は $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数である” ということを

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

と書く．

例 1.5. 点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと f は $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数である[11]：$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$．ここで与えた対応の規則は

$$f\colon \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

と書ける．とくに

$$f(0, 0) = 0, \qquad f(1, 0) = 1, \qquad f(-1, -1) = \sqrt{2}$$

である．

例 1.6. 東経 x 度，北緯 y 度の地点の標高を $f(x, y)$m とすると，$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である（定義域は適当に考えよう）．たとえば

$$f(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$$

である．

例 1.7. いまこの瞬間の，東経 x 度，北緯 y 度の地点の地表における気圧を $f(x, y)$hPa とすれば，$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である．

■グラフと等高線　1 変数関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ の**グラフ** the graph とは，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\bigl\{\bigl(x, f(x)\bigr) \mid x \in I\bigr\} \subset \mathbb{R}^2$$

のことである．関数 f が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標平面 $\mathbb{R}^2$ の曲線になる．

[11] 2 変数関数の場合，$\mathbb{R}^2$ の点を (x_1, x_2) と書くかわりに (x, y) と書くことがある．このとき “$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である” ということもある．この講義では，簡単のため，主に 2 変数関数を扱うが，ほとんどの性質は一般の多変数関数に容易に拡張できる．

同様に 2 変数関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\bigl\{\bigl(x, y, f(x, y)\bigr) \mid (x, y) \in D\bigr\}$$

を f の**グラフ**という．関数 f が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面になる．

一方，2 変数関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ と定数 c に対して，集合

$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

を，関数 f の高さ c の**等高線** the contour, the level set という．関数 f が “性質がよい” もので，c が “適切な” 値であれば，等高線は座標平面のなめらかな曲線になる．これについては第 7 節で言及する．

2 変数関数のグラフや等高線は関数の変化の様子を表しているといってよい．

一般に n 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ と定数 c に対して

$$\bigl\{\bigl(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\bigr) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\bigr\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\bigl\{\bigl(x_1, x_2, \dots, x_n\bigr) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\bigr\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$$

をそれぞれ f の**グラフ**，値 c の**等高面**または**レヴェル集合**という．

■スカラ場　例 1.6, 1.7 のように，関数 f が「座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点に対して実数が対応している」とみなせるとき，f を $\mathbb{R}^2$ 上の**スカラ場** a scalar field[12] または平面のスカラ場という．同様に，3 変数関数が，座標空間の各点にたいして実数を対応させているとみなせるとき，空間のスカラ場という．

[12]「スカラー場」と書くこともある．

問題 1

1-1 例 1.3, 1.4 の 1 変数関数のグラフを描きなさい.

1-2 身の回りの現象の中で，2 変数関数，3 変数関数. . . で表されるものの具体例を挙なさい.

1-3 身の回りで，平面のスカラ場，空間のスカラ場とみなせる量の具体例を挙げなさい

1-4 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0) \text{ のとき}\big) \end{cases}$$

に対して，次の値を求めなさい:

- $f(0,0)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(1,3)$.
- $f(2,4)$, $f(3,6)$, $f(4,8)$.
- $f(a,ma)$ (m は定数, a は 0 でない定数).

1-5 例 1.5 の関数 f のグラフを描きなさい．また，高さ 1, 2, 3 . . . の等高線を描きなさい.

1-6 関数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ のいろいろな高さの等高線を描きなさい．また，この関数のグラフを描きなさい.

1-7 例 1.6, 1.7 の関数 f の等高線は何か．また，例 1.6 の関数 f のグラフは何か.

1-8 問題 1-4 の関数 f の等高線を描きなさい.

1-9 次のような意見に対して，有効な反論をなるべくたくさん挙げなさい：

> 3 変数関数, 4 変数関数 . . . のグラフは描くことができない．したがって，このような関数を考えることに実用的な意味はない.

1-10 例 1.2 に関して,

> 負でない実数 x に対して，平方して x となる負でない実数がただひとつ存在する.

という事実はどのようにして証明すればよいか[13].

[13] むしろ後期のテーマ.