10　重積分の意味と計算

■長方形の分割　閉区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ に対して

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,a\leqq x\leqq b,c\leqq y\leqq d\}\subset\mathbb{R}^2$$

を $[a,b]$ と $[c,d]$ の直積という．この集合は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の長方形とその内部を表している．

いま，区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割をそれぞれ

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,\qquad c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d \tag{10.1}$$

ととると，長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ は，mn 個の小さな長方形に分割される：

$$I=[a,b]\times[c,d]=\bigcup_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}\varDelta_{jk},\qquad \varDelta_{jk}=[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$$

この分割の 2 つのことなる長方形は，たかだか境界にしか共通部分をもたない．このような長方形の分割を $\varDelta$ と書くとき，分割の**幅**とは

$$|\varDelta|:=\max\{(x_1-x_0),(x_2-x_1),\dots,(x_m-x_{m-1}),(y_1-y_0),\dots,(y_n-y_{n-1})\}$$

で与えられる正の数のことである．

■コンパクト集合　$\mathbb{R}^2$ の部分集合が **閉集合** a closed set であるとは，その補集合が開集合 (第 3 節参照) となることである．連続関数 $f_1,\dots,f_n$ に対して

$$\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,f_1(x)\geqq 0,\dots,f_n(x)\geqq 0\}\subset\mathbb{R}^2$$

という形で表される集合は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である．また，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**有界**であるとは，十分大きい長方形 I をとれば $D\subset I$ となることである．$\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合のことを**コンパクト部分集合** a compact set という[1]．

2013 年 6 月 11 日

[1]通常のコンパクト集合の定義とはことなるが，$\mathbb{R}^n$ の場合はこの性質をもつことがコンパクト性の必要十分条件である．

■長方形上の重積分　長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ で定義された関数 f と I の分割 (10.1) に対して

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}f(\xi_{jk},\eta_{jk})(x_{j+1}-x_j)(y_{k+1}-y_k)$$
$$(\text{ただし } \xi_{jk}\in[x_{j-1},x_j],\ \eta_{jk}\in[y_{k-1},y_k])$$

なる和を考える．分割の幅 $|\varDelta|$ を 0 に近づけるとき，(ξ_{jk},η_{jk}) のとり方によらずにこの和が一定の値に近づくとき，その値を長方形 I 上の f の**重積分**といい，

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy$$

と書く[2]．

■コンパクト集合上の重積分　平面 $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合 D 上で定義された関数 f を考える．このとき，D を含む長方形 I をひとつとり，

$$\tilde f(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & \big((x,y)\in D\big)\\ 0 & \big((x,y)\notin D\big)\end{cases}$$

と定め，I 上での $\tilde f$ の重積分を

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_I \tilde f(x,y)\,dx\,dy$$

と書いて，f の D 上での重積分という[3]．

■面積確定集合　コンパクト部分集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で，定数関数 $f(x,y)=1$ が積分可能であるとき，D を**面積確定集合**,

$$|D|:=\iint_D dx\,dy$$

を D の**面積**という．

[2]習慣にしたがって積分記号 $\int$ を 2 つ並べるが，ひとつしか書かない場合もある．
[3]この重積分は，コンパクト集合 D を覆う長方形 I のとり方によらない．

■積分可能性　コンパクト集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 f が**連続**である，とは D を含むある開集合 Ω 上で連続な関数 $\tilde{f}$ で，D 上で f と一致するものが存在すること，と定める．ここでは証明を与えないが，次のことは認めておきたい：

定理 10.1. $\mathbb{R}^2$ の面積確定なコンパクト部分集合 D 上で定義された連続関数 f は D で積分可能，すなわち

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

が存在する．

■多重積分　同様に $\mathbb{R}^3$ のコンパクト部分集合 D 上での積分 (三重積分)，体積確定集合，体積，さらに一般に $\mathbb{R}^m$ 上の積分も定義される．

例 10.2.
- x 軸にそって $x=a$ から $x=b$ の区間に棒が横たわっている．このとき x における棒の線密度を $\rho(x)$ (kg/m) とすると，棒全体の質量は
$$\int_a^b \rho(x)\,dx$$
で与えられる．
- xy 平面上に，コンパクト集合 D の形に板が横たわっている．このとき 点 $(x,y)\in D$ における板の面密度を $\rho(x,y)$ (kg/m^2) とすると，板全体の質量は
$$\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$
で与えられる．
- 空間のコンパクト集合 D の形の立体の，点 $(x,y,z)\in D$ における密度が $\rho(x,y,z)$ (kg/m^3) であるならば，立体の質量は
$$\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
である．

例 10.3.
- 平面の長方形領域 $I=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ は面積確定で $|I|=(b-a)(d-c)$ である．
- 区間 $[a,b]$ で定義された (一変数の) 連続関数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ が $\varphi(x)\leqq\psi(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ を満たしているとする．このとき，
$$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x), a\leqq x\leqq b\}$$
とおく (図示せよ) と，これは $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合である．
とくに，D は面積確定で，
$$|D|=\int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$
が成り立つ．
実際，区間 $[a,b]$ の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ をり，その小区間 $\Delta_j=[x_{j-1},x_j]$ に対応する D の部分
$$D_j:=\{(x,y)\in D\,|\,x\in\Delta_j\}$$
の面積は，分割が十分に細かいときは
$$\left[\int_{\varphi(x_{j-1})}^{\psi(x_{j-1})} f(x_j,y)\,dy\right]\Delta x_j \qquad (\Delta x_j=x_j-x_{j-1})$$
で近似される．添字 j を動かしてこれらの和をとって $|\Delta|\to 0$ とすれば，一変数関数の積分の定義から面積の式がえられる．
- コンパクト集合 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ 上で関数 $f(x,y)=x^2$ を積分する：
$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right]dx\\ &= 2\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right]dx\\ &= 2\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.\end{aligned}$$

問題 10

10-1 テキスト 119 ページ，章末問題 1, 2.

10-2 $\mathbb{R}^3$ 原点を中心とする半径 1 の球体 D の体積を

$$\iiint_D dx\,dy\,dz$$

を計算することにより求めなさい．同様のことを $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^4$ に対して行い，半径 1 の 4 次元球体，5 次元球体の "体積" を求めなさい．