

## 11 重積分の応用

例 11.1.  $D = \{(x, y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  の面積  $|D|$  を求めよう. 図形の対称性から

$$D' := \{(x, y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

の面積  $|D'|$  を求めれば  $|D| = 4|D'|$  である.

$$|D'| = \iint_{D'} 1 \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}} dx = \int_0^1 \left[ \sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}} \right] dy = \frac{3\pi}{32}.$$

したがって求める面積は  $3\pi/8$ .

例 11.2. 関数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b \text{ は正の定数})$$

のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の体積を求めよう.  $f(x, y)$  は

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

上で負でない値をとっている. 点  $D$  上の小さな長方形  $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$  と, この長方形上の  $f(x, y)$  のグラフで囲まれた部分の体積は,

$$f(x, y)\Delta x\Delta y$$

で近似されるので, 考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy = \frac{2}{3}\pi ab$$

であることがわかる.

例 11.3. 空間の部分集合  $D = \{(x, y, z) \mid z^2 \leq 4x, y^2 \leq x - x^2\}$  の体積  $|D|$  を求めよう. 平面の部分集合  $D' = \{(x, y) \mid y^2 \leq x - x^2\}$  に対して

$$|D| = \iiint_D dx \, dy \, dz = \iint_{D'} dx \, dy \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dz = \iint_{D'} 4\sqrt{x} \, dx \, dy = \cdots = \frac{32}{15}.$$

例 11.4. グラフ  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) の面積を求めよう. ただし  $D$  は  $\mathbb{R}^2$  のコンパクト部分集合で,  $f$  は  $D$  上で  $C^1$ -級とする.

集合  $D$  上の小さな長方形  $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$  上のグラフは空間の 3 点

$$P = (x, y, f(x, y)),$$

$$Q = (x + \Delta x, y, f(x + \Delta x, y)),$$

$$R = (x, y + \Delta y, f(x, y + \Delta y))$$

を頂点にもち  $PQ, PR$  を 2 辺にもつ平行四辺形に近い. この微小平行四辺形の面積は, 空間ベクトルの外積 (ベクトル積) を用いて

$$\begin{aligned} & |\vec{PQ} \times \vec{PR}| \\ &= |(\Delta x, 0, f(x + \Delta x, y) - f(x, y)) \times (0, \Delta y, f(x, y + \Delta y) - f(x, y))| \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right)^2} \Delta x \Delta y \\ &\doteq \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

と書けるので, この総和をとれば, 求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dx \, dy$$

で求められる.

### 問題 11

11-1  $\mathbb{R}^2$  の長方形  $D = [a, b] \times [c, d]$  を含む領域で定義された  $C^2$ -級関数  $F$  に対して

$$\iint_D \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \, dx \, dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

であることを確かめなさい.

11-2 次の積分の値を求めなさい .

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \\ \iint_D \frac{x}{y} dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq x^2, 2 \leq x \leq 4\}, \\ \iint_D x^2 y dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}, \\ \iint_D \sqrt{xy} dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}, \\ \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, & \quad D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}. \end{aligned}$$

11-3 座標空間の次の図形の体積を求めなさい :

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad a, b, c \text{ は正の定数.} \\ \Omega &= \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leq 1 \right\} \quad a, b, c \text{ は正の定数.} \end{aligned}$$

11-4  $xy$  平面上の面積確定集合  $D$  が上半平面  $\{(x, y) \mid y > 0\}$  に含まれているとする . このとき

- $xy$  平面が座標空間に含まれているとみなす .  $D$  を  $x$  軸の周りに一回転して得られる立体の体積は

$$2\pi \iint_D y dx dy$$

である .

- $D$  の重心の座標は

$$\frac{1}{|D|} \left( \iint_D x dx dy, \iint_D y dx dy \right) \quad \left( |D| = \iint_D dx dy \right)$$

である .

11-5  $xy$  平面上のなめらかな曲線  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) を  $x$  軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

で与えられることを確かめなさい . ただし , 区間  $[a, b]$  上で  $f(x) > 0$  であるとする .

11-6  $xy$  平面上の曲線  $C$  が

$$C : \gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメータ表示されている . ただし  $x(t), y(t)$  は  $t$  の一変数関数として  $C^1$ -級で , 区間  $[a, b]$  で  $y(t) > 0$  であるとする .

- 曲線  $C$  を  $x$  軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられる .

- 曲線  $C$  の重心の座標は

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \left( \int_a^b x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right) \\ \left( L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right) \end{aligned}$$

で与えられる .