12 重積分の変数変換

■線形変換と面積 $\mathbb{R}^2$ の線形変換

$$L_A\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad (A \text{ は 2 次の正方行列})$$

を考える．行列 A が正則，すなわち $\det A \neq 0$ ならば L_A は逆写像をもつ．とくに L_A は 1 対 1 の写像 (単射) である．行列 A が正則であるとき L_A を **正則な線形変換** とよぶ．

補題 12.1. 線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の直線の像は直線または一点である．とくに L_A が正則ならば直線の像は直線になる．

証明． 異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{R}^2$ を結ぶ直線 l の像を調べよう．P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると直線 l は

$$l = \{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

と表される．ここで L_A の線形性から

$$L_A\bigl((1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}\bigr) = (1-t)A\boldsymbol{p} + tA\boldsymbol{q}$$

なので，l の L_A による像は

$$l' = \{(1-t)\tilde{\boldsymbol{p}} + t\tilde{\boldsymbol{q}} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \qquad \tilde{\boldsymbol{p}} = A\boldsymbol{p}, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q}$$

とかける．とくに $\overrightarrow{OP'} = \tilde{\boldsymbol{p}}$, $\overrightarrow{OQ'} = \tilde{\boldsymbol{q}}$ となる点 P', Q' をとると (1) $P' \neq Q'$ のとき，l' は P', Q' を通る直線となる．(2) $P' = Q'$ のとき l' は P' 1 点からなる集合である．さらに $\det A \neq 0$ なら写像 L_A は 1 対 1 であるから (2) のケースは起こりえない．□

補題 12.2. 正則な線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の平行な 2 直線の像は平行な 2 直線である．

証明． 平行な 2 直線の像は 2 つの直線であるが，これらが交わるとすると L_A が 1 対 1 であることに反する．□

2013 年 7 月 9 日

補題 12.3. 直線 l 上の異なる 2 点 P, Q をとっておく．直線 l にない 2 点 R, S が直線 l の同じ側にあるための必要十分条件は，$\det(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$ と $\det(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$ が同じ符号をもつことである．ここで $\mathbb{R}^2$ のベクトルは列ベクトルとみなし，det は 2 つの 2 次列ベクトルを並べてできる行列の行列式を表す．

証明． ${}^t(a,b) = \overrightarrow{PQ}$ とおき，$\boldsymbol{n} = {}^t(-b,a)$ とすると，(1) $\det(\overrightarrow{PQ}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ である．ただし右辺は $\mathbb{R}^2$ の内積を表す．(2) $\boldsymbol{n}$ は直線 l に直交する零でないベクトルである．
直線 l 上にない点 R が，直線 l の $\boldsymbol{n}$ が指し示す側にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{PR}$ と $\boldsymbol{n}$ が鋭角をなすことである：$(\overrightarrow{PR}, \boldsymbol{n}) > 0$．このことと (1) から結論が得られる．□

補題 12.4. 線形変換 L_A によって，$\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部は $\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部，または線分に移る．とくに L_A が正則ならば平行四辺形の像は平行四辺形である．

証明． 簡単のため L_A が正則であるとし，平行四辺形 $PQRS$ の像を求める：$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ とすると，線分 PQ は $\{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ となるので，その像は線分 P', Q' となる．ただし P', Q' はそれぞれ L_A による P, Q の像．各辺に対して同様のことを考えれば，平行四辺形の像が平行四辺形となることがわかる．さらに，平行四辺形の内部は 4 つの辺を含む直線の一方の側の共通部分なので，補題 12.3 から結論を得る (すこし端折った)．□

補題 12.5. 平行四辺形 $PQRS$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ である．ただし $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR}$ で，これらを 2 次の列ベクトルとみなしている．

証明． ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，求める面積は

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}. \tag{12.1}$$

ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．ここで $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2)$ とおいて (12.1) を計算すれば結論を得る．□

補題 12.6. 線形変換 L_A による平行四辺形 D の像の面積は，$|\det A|\,|D|$ である．ただし $|D|$ は D の面積である．

証明． 平行四辺形 $D = PQRS$ の各頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ とし，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$$

とおく．P, Q, R の L_A による像をそれぞれ P', Q', R' と書くと，

$$\overrightarrow{P'Q'} = A\boldsymbol{q} - A\boldsymbol{p} = A(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{P'R'} = A\boldsymbol{b}$$

であるから

$$|D'| = |\det(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})| = \bigl|\det\bigl(A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\bigr)\bigr| = \bigl|\det A \cdot \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\bigr| = |\det A|\,|D|.$$

□

■2 変数の変数変換　$\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset (u,v) \longmapsto F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^2$$

を考える．微分可能性から

$$\begin{aligned} &F(a+h, b+k) \\ &\qquad = F(a,b) + \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}(h,k) \\ &\qquad\qquad |\boldsymbol{\varepsilon}(h,k)| \to 0 \quad \text{as} \quad (h,k) \to (0,0) \end{aligned}$$

と書ける．この ${}^t(h,k)$ の係数行列は，F の微分 dF またはヤコビ行列 (第 6 節) である．このことから，(h,k) が十分小さいときは，近似式

$$\Phi(h,k) := F(a+h, b+k) - F(a,b) \fallingdotseq \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

記号． ヤコビ行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

と書き，**ヤコビ行列式**，Jacobian という．

以下，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

が至るところ成立しているとする．

定理 12.7 (重積分の変数変換；テキスト 92 ページ)**．** 上の状況で xy 平面上のコンパクト集合 D と uv 平面上のコンパクト集合 E が F によって 1 対 1 に対応しているとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

が成り立つ．

問題 12

12-1　テキスト 94 ページ，問 6,7; 95 ページ，問 8, 9.

12-2　テキスト 97 ページ問 10.

12-3　テキスト 100 ページ，問 11, 12; 101 ページ，問 13, 14.

12-4　テキスト 119 ページ（章末問題）1, 2, 3, 4.