13　広義積分

■広義積分　半開区間 $(a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限値}\quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \text{が存在するとき，その値を}\quad \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．関数 f が $[a,b)$ で連続であるときも同様に $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が定義される．

また，区間 $[a,\infty)$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限値}\quad \lim_{M\to+\infty}\int_{a}^{M} f(x)\,dx \quad \text{が存在するとき，その値を}\quad \int_a^\infty f(x)\,dx$$

と書く．同様に $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ も定義される．

これらは定積分の概念を拡張したもので**広義積分**[1] とよばれる．とくに，定義のなかに現れる極限値が存在するとき**広義積分は収束する**，そうでないとき**発散する**という．

例 13.1.

- 正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{なので}\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

すなわち，この広義積分は収束する．

- 正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = -\log\varepsilon \quad \text{なので}\quad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} -\log\varepsilon \to +\infty.$$

すなわち，この広義積分は発散する．

- 正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = 1-e^{-M} \quad \text{なので}\quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}(1-e^{-M}) = 1.$$

すなわち，この広義積分は収束する．

2013 年 7 月 16 日

[1]“こうぎせきぶん” と読む．“広義” は “広い意味” という意味．

- 正の数 M に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \log M \quad \text{なので}\quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\log M = +\infty$$

すなわち，この広義積分は発散する．

例 13.2. 原始関数が求まらなくても，広義積分の収束がわかる場合がある．たとえば，定数 $k\in(0,1)$ に対して広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

を考えよう．正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (x=\sin t)$$

であるが，右辺の被積分関数は $[0,\frac{\pi}{2}]$ で連続であるから，$\varepsilon\to+0$ の極限をとることができて[2]

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$$

を得る．

関数 $f(x)$ が (a,b) で連続な場合は

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$$

が $\varepsilon_1\to0$, $\varepsilon_2\to0$ としたときにその近づけ方によらずある値に収束するとき，その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と定める．区間の一方または両方の端点が有限でない場合[3] も同様に定義する．

[2]原始関数の連続性を用いる．
[3]不正確な言い方だが. . .

例 13.3. 正の数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{2}\log(1-x^2)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\frac{1}{2}\bigl(\log\varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log\varepsilon_1\bigr)\end{aligned}$$

であるが，$\varepsilon_1 \to +0$ のとき，右辺の最後の項は発散するので，広義積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

は発散する．特別な近づけ方で $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0,0)$ とすると，たとえば $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \to +0$ のとき

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \to 0$$

となるが，

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,dx = 0 \qquad \text{であるとはいわない．}$$

■広義積分の収束判定　広義積分の値が具体的にわからなくても，収束することはわかる場合がある．

事実 13.4. 区間 $I = (a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x) \geqq 0$, $g(x) \geqq 0$ を満たし，さらに

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (x \in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する．

この事実の証明には "実数の連続性" が必要である．時間があれば後期に説明するかもしれない[4]．

[4] 少なくとも，これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する．

例 13.5 (ガンマ関数)**.** 実数 $s > 0$ に対して広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

は収束する．そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \qquad (s > 0)$$

とおき，これを**ガンマ関数**とよぶ．

例 13.6 (ベータ関数)**.** 正の数 p, q に関して広義積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束する．このようにして得られる 2 変数関数を**ベータ関数**とよぶ．

問題 13

13-1　広義積分

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx, \qquad \int_1^\infty x^\beta\,dx$$

が収束，発散するような実数 α, β の範囲を求めなさい．

13-2　例 13.5 の広義積分が収束することを確かめなさい．なお，

- この積分は区間の上端も下端も広義積分になっているので，たとえば $(0,1]$ での積分と $[1,+\infty)$ での積分の収束を別々に示す必要がある．
- ∞ の側の収束性には次の事実を用いる：m を任意の正の整数としたとき，

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0.$$

これは次の不等式から示すことができる：

$$x > 0 \text{ ならば} \qquad f_m(x) := e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m\right) > 0$$

である．このことは，$f_m'(x) = f_{m-1}(x)$ であることに注意して数学的帰納法を用いれば示すことができる．

13-3　任意の正の数 s に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることを示しなさい．これを用いて，正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを確かめなさい．

13-4　例 13.6 の広義積分が収束することを確かめなさい．