14　広義積分の応用

今回は次を示す：

定理 14.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{14.1}$$

まず，式 (14.1) で与えられる広義積分が収束することを確かめよう．関数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geqq 1) \\ 1 & (-1 < x < 1) \\ e^{x} & (x \leqq -1) \end{cases}$$

と定めると，すべての実数 x で

$$0 \leqq f(x) \leqq \tilde{f}(x)$$

が成り立つ．さらに，1 より大きい正の数 A, B に対して

$$\int_{-A}^{B} \tilde{f}(x)\,dx = \int_{-A}^{-1} e^{x}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{B} e^{-x}\,dx = 2 + \frac{2}{e} - e^{-A} - e^{-B}$$

だが，$A \to +\infty$, $B \to +\infty$ のとき右辺は収束するから，$\tilde{f}$ の実数全体での積分は収束する．したがって事実 13.4 から広義積分 (14.1) は収束することがわかる．

いま，正の実数 a と R に対して

$$D_a = [0,a] \times [0,a] \qquad E_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq R^2\}$$

とおく．すると，

$$E_a \subset I_a \subset E_{\sqrt{2}a}$$

が成り立っている．したがって

$$\iint_{E_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqq \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqq \iint_{E_{\sqrt{2}a}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

2013 年 7 月 23 日

が成り立つ．ここで，極座標による積分を用いて

$$\iint_{E_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$$

が得られるから，

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) \leqq \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2}).$$

ところが，中央の積分は

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^a e^{-x^2}\,dx \int_0^a e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

となるので，$a \to \infty$ とすれば

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

したがって

$$(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

となり (14.1) が得られる．

問題 14

14-1　定数 μ と正の数 σ に対して次を示しなさい：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \mu,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma^2.$$