2 偏微分

2.1 1 変数関数の微分 (復習)

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 1 変数関数 f と $a \in I$ に対して極限値

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{2.1}$$

が存在するとき，f は a で**微分可能** differentiable であるという．このとき，極限値 (2.1) を f の a における**微分係数** the differential coefficient と呼び，$f'(a)$ で表す．定義域 I 上のすべての点で f が微分可能ならば，新しい関数

$$f' \colon I \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

が定まる．これを f の**導関数** the derivative とよぶ．

例 2.1.

- $f(x) = |x|$ で与えられる関数 f は $x = 0$ で微分可能でない．
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ で与えられる関数 f は $x = 0$ で微分可能でない．f のグラフは滑らかな曲線であることに注意しよう．
- 正の実数 α に対して

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる関数 f は $\alpha > 1$ のとき 0 で (したがって $\mathbb{R}$ で) 微分可能で，

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．

2013 年 4 月 16 日

微分可能な関数 f を $y = f(x)$ と書き表したとき，

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

と書くことがある．この記号は，合成関数・逆関数の微分公式を覚えるのに便利であった．

さらに $f'(x)$ が微分可能なとき，$f'(x)$ の導関数 $f''(x)$ を f の **2 次導関数** (2 階微分) the second derivative，$f''(x)$ の導関数を 3 次導関数 the third derivative ... と呼ぶ．一般に f $(y = f(x))$ の n 次導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

と書く．ここで $f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束しておく．

2.2 偏微分係数と偏導関数

領域[1] $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数

$$f \colon D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

を考える．点 $(a, b) \in D$ において，極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

がともに存在するとき，f は (a, b) で**偏微分可能** partially differentiable であるといって，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

を “f の (a, b) における x に関する (y に関する) **偏微分係数**” という．

さらに f が D の各点で偏微分可能なとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x} \colon D \ni (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R}$$

[1] 用語 “領域” の意味は次回第 3 節で述べる．

は D で定義された 2 変数関数を与える．これを f の x に関する**偏導関数** the partial derivative with respect to x という．同様に f の y に関する 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ も定義される．

注意 2.2 (記号の注意)．

- 偏導関数の記号 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ の "∂" は**ディー**または**ラウンド・ディー**と読む．これを d と書くことはない．
- 2 行にまたがるのがいやな場合は
$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$
という記号を使う．

■偏導関数の計算　関数 f (関数 $f(x,y)$ ということがある) の x に関する偏導関数は，y の値を止めたまま x を変化させて得られる 1 変数関数の導関数とみなすことができる．したがって $f(x,y)$ が x, y の式で与えられているとき，f_x は $f(x,y)$ の y を定数として x に関して微分したもので与えられる．

■2 階の偏導関数　関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ がそれぞれ偏微分可能ならば 4 つの 2 変数関数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

を考えることができる．これらを f の **2 次偏導関数** the second partial derivatives という．

例 2.3. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^2$ に対して

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6xy, \qquad f_y(x,y) = 3x^2 + 2y.$$

さらにこれを微分して 2 次偏導関数

$$f_{xx} = 6x + 6y, \qquad f_{xy} = 6x, \qquad f_{yx} = 6x, \qquad f_{yy} = 2$$

を得る．

この例では f_{xy} (x で偏微分して，そのあと y で偏微分したもの) と f_{yx} (y で偏微分して，そのあと x で偏微分したもの) が一致する．これは偶然ではなく

よく使われる状況では f_{xy} と f_{yx} は一致する．

これを**偏微分の順序交換定理**という．この定理を正確に述べるためには，2 変数関数の連続性の概念が必要なので，それを次回（第 3 節）で扱おう．

問題 2-8 は f_{xy} と f_{yx} が一致しない例 (病的な例) である．

■高階の偏導関数　2 次偏導関数がさらに偏微分可能ならば，3 次偏導関数を考えることができる．一般に 2 変数関数 f ($f(x,y)$) の 3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \dots$$

などたくさんあるが，性質のよい関数ならば，たとえば上の 3 つは一致する（偏微分の順序交換定理）．このような場合，3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

の 4 通りとなる．さらに高次の偏導関数も考えることができる．

問題 2

2-1　例 2.1 を確かめなさい．

2-2　関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

の偏導関数をすべて求めなさい．

2-3　変数 (t,x) の 2 変数関数 $u(t,x)$ に関する関係式

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を**熱方程式** the heat equation という (このいわれについて調べなさい)．関数

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

は方程式 $(*)$ を満足することを示しなさい．

2-4 変数 (t,x) の 2 変数関数 $u(t,x)$ に関する関係式

$$(**)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

を**波動方程式** the wave equation という (このいわれについて調べなさい)．関数

$$u(t,x)=a\sin(t+x)+b\sin(t-x)\qquad (a,\ b\ \text{は定数})$$

は方程式 $(**)$ を満足することを示しなさい．

2-5 2 変数関数 $f(x,y)$ が関係式

$$f_{xx}+f_{yy}=0$$

を満たしているとき，f は**調和関数** a harmonic function であるという (このいわれについて調べなさい)．次の関数は調和関数であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$$

また，x, y の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい．

2-6 3 変数関数 $f(x,y,z)$ が関係式

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$$

を満たしているとき，f を (3 変数の) 調和関数という．1 変数関数 $F(t)$ を用いて

$$f(x,y,z)=F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

という形でかけるような 3 変数関数 f が調和関数となるような F を求めなさい．

2-7 2 変数関数 $f(x,y)$ に関する関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0$$

を満たすとき，関数 f のグラフで与えられる曲面を**極小曲面** a minimal surface という (このいわれについて調べなさい)．次の関数 (定義域はどこと考えるのがよいか) のグラフは極小曲面であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\bigl(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\bigr),\qquad g(x,y)=\log\frac{\cos x}{\cos y}.$$

2-8 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は 2 階偏微分可能であることを示し，2 次偏導関数を求めなさい．(テキスト 21 ページの問い 7 参照)．

2-9 一般に n 変数関数の 2 次導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい．

2-10 一般に n 変数関数の m 次導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい．