3 連続性・微分可能性

3.1 1 変数関数の連続性と微分可能性 (復習)

■連続性と微分可能性 区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された 1 変数関数 f が $a \in I$ で **連続** continuous であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．

例 3.1.
- 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で連続でない．実際 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to -0} f(x) = 1$ であるが $f(0) = 0$ である．

- 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で連続でない．実際

$$x_n = \left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-1}, \quad y_n = \left[\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi\right]^{-1} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

により数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を定義すると $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ であるが，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$ となるので $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

定理 3.2. 一変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である．

証明． 極限の性質から

$$\begin{aligned}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) - f(a) &= \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - f(a)\bigr) = \lim_{h\to 0}\bigl(f(a+h) - f(a)\bigr) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right) = \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} h\right) \\ &= f'(a) \times 0 = 0.\end{aligned}$$

□

2013 年 4 月 23 日 2013 年 5 月 14 日訂正

□

■C^r-級関数 区間 I で定義された 1 変数関数 f に対して

- f が I で連続である，とは I の各点で連続なことである．このとき f は I で C^0-級である of class C^0，という．
- f が I で微分可能であるとは I の各点で微分可能なことである．このとき定理 3.2 より f は自動的に I で連続になる．また f の導関数 f' は，区間 I で定義された関数となる (f' が連続であるとは限らない)．
- f が I で C^1-級である，とは，f が I で微分可能で，かつ導関数 f' が I で連続であること，と定義する．
- 正の整数 r に対して f が I で C^r-級であるとは、f の r 次導関数 $f^{(r)}$ が存在して I で連続となることと定義する．
- 関数 f が全ての負でない整数 r に対して C^r-級であるとき，f は C^∞-級であるという．

例 3.3.
- 正の整数 m と実数 $a_0, \dots, a_m$ に対して

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_1 x + a_0$$

で与えられる関数を x の**多項式** a polynomial という．とくに $a_k = 0$ $(k \geqq 1)$ であるような多項式で与えられる関数 $f(x) = a_0$ を**定数関数** a constant function という．多項式は C^∞-級である．

- 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる関数 f は微分可能であるが C^1-級ではない．実際，

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる（例 2.1 参照）が，$\lim_{x\to 0} f'(x)$ は存在しない（例 3.1 参照）ので f' は 0 で連続でない．

■平均値の定理　多変数関数の微分を議論するのに必要なので，平均値の定理を思い出しておこう．証明は後期の微分積分学第二で与える：

定理 3.4. 関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a\in I$ と $a+h\in I$ となるような h に対して，

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h \qquad (0<\theta<1)$$

を満たす θ が存在する[1]．

例 3.5. 区間 I で定義された微分可能な関数 f が I の各点で $f'(x)=0$ を満たしているならば f は定数関数である．実際，I の点 a をひとつ固定して $c=f(a)$ とおく．I の a と異なる点 x をとり，$x-a=h\ (\neq 0)$ とおくと，

$$f(x)-f(a)=f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h \qquad (0<\theta<1)$$

を満たす θ が存在する．ここで $a+\theta h$ は a と x の間の点だから，I の点である．したがって，仮定より右辺 $f'(a+\theta h)=0$．このことから $f(x)=f(a)=c$ が成り立つ．ここで x は任意だったので結論が得られた．

3.2　2 変数関数の極限・連続性・微分可能性

■領域　座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**領域** a domain であるとは，それが “ひと続きで端をもたない” ことである[2]．たとえば $\mathbb{R}^2$ 全体，開円板や開長方形

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<r^2\}, \qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<x<b, c<y<d\}$$

は領域である．ただし r,a,b,c,d は実数の定数で，$r>0$, $a<b$, $c<d$ を満たすものとする．

以下，2 変数関数 f は $\mathbb{R}^2$ の領域 D を定義域に持つものとする．

[1] 関数 f を与えたとき，θ は a と h に依存して定まる．与えられた a, h に対して具体的に θ の値を求めることはそれほど重要ではない．

[2] このことのもう少し正確な意味はこの節末で述べる

■極限　2 変数関数 f に対して

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$$

である，とは (x,y) がどのような経路で (a,b) に近づいても $f(x,y)$ の値が A に近づくことである[3]．

注意 3.6. (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k)$.

(ii) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k)=A$ とは，$\sqrt{h^2+k^2}$ が 0 に近づくときに $f(a+h,b+k)$ が A に近づくことである．

(iii) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k)=A$ とは，正の数 r が 0 に近づくときに $f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$ が θ によらずに A に近づくことである．

(iv) 二つの 2 変数関数 $\alpha(h,k)$, $\beta(h,k)$ が

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k)=0, \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h,k)=0$$

を満たしているとする．さらに 2 変数関数 f が $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ を満たしているならば，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\bigl(a+\alpha(h,k),b+\beta(h,k)\bigr)=A.$$

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ ならば，0 に収束する 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a+h_n,b+k_n)=A$.

(vi) “$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$” でないための必要十分条件は, 0 に収束する 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ をうまくとると $f(a+h_n,b+k_n)$ が A に収束しないようにできることである．

例 3.7.
- 関数 $f(x,y)=2xy/(x^2+y^2)$ を考える．$h_n=\frac{1}{n}$, $k_n=\frac{1}{n}$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(h_n,k_n)=1$ であるが，$h_n=\frac{1}{n}$, $k_n=-\frac{1}{n}$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(h_n,k_n)=-1$ である．したがって，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Bigr)=0, \qquad \lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr)=0.$$

[3] このことのもう少しきちんとした定義は後期に紹介する．

- $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ としたときの極限値を持たない．一方，

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1.$$

- $f(x,y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ のとき 0 に近づく．実際，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと

$$(*)\qquad \begin{aligned} f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)&=r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta\end{aligned}$$

だが，$|\sin 4\theta|\leqq 1$ だから

$$\left|\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\right|\leqq\frac{r^2}{4}\qquad\text{すなわち}\qquad -\frac{r^2}{4}\leqq\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\leqq\frac{r^2}{4}$$

なので $(*)$ の右辺は $r\to 0$ とすると 0 に近づく．

■連続性

定義 3.8. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f が点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つことである．

例 3.9. (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続でないが，偏微分可能で $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続である．

一般に，多項式であらわされる関数は連続，有理式，すなわち多項式の商で表される関数は分母が 0 とならない点で連続である．

■微分可能性

定義 3.10. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で**微分可能**であるとは，うまく定数 A, B を選び，$(a+h,b+k)\in D$ となるような (h,k) に対して

$$(\star)\qquad f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

となるようにできることである．

命題 3.11. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能であって，$(\star)$ の定数 A, B は $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ でなければならない．

証明． 式 $(\star)$ の $k=0$ として

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\frac{Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2}}{h}=A+\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}$$

だが，$-|\varepsilon(h,0)|\leqq\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}\leqq|\varepsilon(h,0)|$，かつ $h\to 0$ とすると $\varepsilon(h,0)\to 0$ だから

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b).$$

一方 $h=0$ とすることで $B=f_y(a,b)$ も得られる． □

命題 3.12. 関数 f が (a,b) で微分可能ならば (a,b) で連続である．

証明． 式 $(\star)$ の両辺で $(h,k)\to(0,0)$ とすればよい． □

注意 3.13. 命題 3.11 の逆は成立しない．実際，例 3.9 (1) の関数 f は $(0,0)$ で偏微分可能であるが連続でない．したがって，命題 3.12 の対偶から微分可能でない．

■微分可能性の十分条件

命題 3.14. 領域 D で定義された二変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である．

証明． 点 $(a,b)\in D$ で微分可能であることを示そう．$(\star)$ の $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ として $\varepsilon(h,k)\to 0$ $((h,k)\to(0,0))$ を示せばよい:

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく．いま，k を一つ固定して

$$F(h):=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)$$

とおくと[4] f の偏微分可能性から F は h の微分可能な関数で $F'(h)=f_x(a+h,b+k)$, $F(0)=0$ が成り立つ．そこで F に平均値の定理 3.4 を適用すると

$$F(h)=F(h)-F(0)=F'(0+\theta h)h=F'(\theta h)h=f_x(a+\theta h,b+k)h \qquad (0<\theta=\theta(h,k)<1)$$

を満たす θ が存在する ($\theta=\theta(h,k)$ は h と k に依存して決まる)．同様に $G(k)=f(a,b+k)-f(a,b)$ とおくと，k を定めるごとに

$$G(k)=G'(\delta k)k=f_y(a,b+\delta k)k \qquad (0<\delta=\delta(k)<1)$$

を満たす $\delta=\delta(k)$ をとることができる．したがって

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=\frac{F(h)+G(k)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&=\bigl(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)\bigr)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+\bigl(f_y(a,b+\delta k)-f_y(a,b)\bigr)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

となるが，$0<\theta<1$, $0<\delta<1$ だから $\theta h\to 0$, $\delta k\to 0$ $((h,k)\to(0,0))$ が成り立つことと，$|h/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$, $|k/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$ であることから，右辺は $(h,k)\to(0,0)$ のときに 0 に近づく． □

[4] 記号 “:=” は (ここでは) 左辺を右辺によって定義するという意味を表す．

注意 3.15. 命題 3.14 の逆は成立しない．実際，

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で微分可能であるが f_x, f_y は原点で連続でない．

■C^r-級関数　領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された二変数関数 f に対して

- f が D で連続である，とは D の各点で連続なことである．このとき f は D で C^0-級である，という．
- f が D で微分可能であるとは D の各点で微分可能なことである．このとき f は自動的に D で連続，また D の各点で偏微分可能になる．また f の偏導関数 f_x, f_y は，D で定義された関数となる
- f が D で C^1-級であるとは D の各点で偏微分可能で，f_x, f_y が D で連続となることである．
- f が D で C^2-級である，とは，f の 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が D 上で定義されていて，さらにそれらがすべて D で連続であることと定義する．

■偏微分の順序交換定理

定理 3.16 (偏微分の順序交換)**.** 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された二変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在して，ともに連続であるとき，$f_{xy}=f_{yx}$ が成立する．

証明． 点 $(a,b)\in D$ を固定して $f_{xy}(a,b)$ と $f_{yx}(a,b)$ が等しいことを示す．いま

$$V=V(h,k):=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)}{hk}$$

とおくと

$$V=\frac{1}{k}\frac{F(h)-F(0)}{h} \qquad \bigl(F(t):=f(a+t,b+k)-f(a+t,b)\bigr)$$

であるが，$F'(t)=f_x(a+t,b+k)-f_x(a+t,b)$ であることに注意して平均値の定理 3.4 を適用すれば，

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{k}F'(\theta_1 h) = \frac{1}{k}\bigl(f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)\bigr) \\ &= \frac{1}{k}\bigl(F_1(k)-F_1(0)\bigr) \qquad (F_1(t) := f_x(a+\theta_1 h, b+t)) \end{aligned}$$

となる $\theta_1\in(0,1)$ が存在する．さらに $F_1'(t)=f_{xy}(a+\theta_1 h, b+t)$ に注意すれば，平均値の定理から次を満たす θ_1, θ_2 が存在することがわかる：

$$(\star) \qquad V = f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) \qquad \bigl(\theta_1,\theta_2\in(0,1)\bigr).$$

同様に $V=(G(k)-G(0))/(hk)$ $(G(t):=f(a+h,b+t)-f(a,b+t))$ とすると

$$(\star\star) \qquad V = f_{yx}(a+\varphi_1 h, b+\varphi_2 k) \qquad \bigl(\varphi_1,\varphi_2\in(0,1)\bigr)$$

となる φ_1, φ_2 が存在する．f_{xy}, f_{yx} の連続性から $(\star)$, $(\star\star)$ の $(h,k)\to(0,0)$ とする極限をとれば，$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ が成り立つことがわかる． □

とくに f が C^2-級であれば $f_{xy}=f_{yx}$ である．

◆ 領域について

第 3.2 節冒頭で“領域”のいい加減な定義を与えた．整合性のためにここで領域の定義を与えるが，当面はあまり気にしなくてよい．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の**連続な道** a continuous path とは，閉区間 $I=[a,b]$ で定義されたふたつの連続関数 x, y の組で与えられる対応[5]

$$\gamma=(x,y)\colon I\ni t\longmapsto \gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)\in\mathbb{R}^2$$

である．このとき $\mathbb{R}^2$ の点 $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ をそれぞれ道 γ の**始点**, **終点**とよぶ．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**連結** connected であるとは，D の各点 P, Q に対して P を始点，Q を終点とする連続な道 $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ で各 $\gamma(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ が D の点となるものが存在することをである．(この概念は正確には“弧状連結性” pathwise connectedness という)．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 $P=(a,b)$ と正の実数 ε に対して

$$U_\varepsilon(P) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}\subset\mathbb{R}^2$$

で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合を“点 P を中心とした半径 ε の**円板**” the disc centered at P of radius ε，あるいは短く“P を中心とする ε-円板” the ε-disc centered at P という．

[5]写像 a mapping という．いままで考えてきた関数は，実数を値にとるが，ここでの γ は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点を値にとる．一般に“対応の規則”を写像というが，値域が数の集合であるときをとくに関数とよぶことが多い．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**開集合** an open set であるとは D の各点 P に対して $U_\varepsilon(P)\subset D$ となるような正の数 ε をとることができることである．

ここでは証明を与えないが，次の事実は重要である：

事実． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された連続関数 $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)>0\}\subset\mathbb{R}^2$$

は開集合である．

これらの用語を用いて，“領域”という語に定義を与える：

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**領域** a domain であるとは，D が連結かつ開集合となることである．

問題 3

3-1 実数 α に対して，次の条件を満たす整数 k を求めなさい：関数

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ で C^k 級であるが C^{k+1}-級でない．

3-2 平均値の定理 3.4 の絵を $h>0$, $h<0$ の場合にそれぞれ描きなさい．

3-3 数直線上の区間 $I\subset\mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が常に正の値をとるならば，f は I 上で単調増加である．このことを，平均値の定理を用いて証明しなさい．ただし，1 変数関数 f が区間 I で単調増加であるとは“I 上の 2 点 x_1, x_2 が $x_1<x_2$ を満たすならば $f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つ”ことである．

3-4 2 変数関数が連続であること，偏微分可能であること，微分可能であること，C^1-級であることの間の関係を整理しなさい．
例：微分可能 ⇒ 連続；連続 $\not\Rightarrow$ 微分可能．実際 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で連続だが微分可能でない．

3-5 2 変数関数が C^r-級であることを定義しなさい．また C^r-級の関数は，任意の r 以下の任意の負でない整数 k に対して C^k-級であることを確かめなさい．

3-6 2 変数関数が C^∞-級であることを定義しなさい．