4　初等関数

■三角関数の記号　高等学校で学んだ**余弦** cosine, **正弦** sine, **正接** tangent の他に，次の記号を用いることがある：

$$\cot x := \frac{1}{\tan x}, \qquad \sec x := \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x := \frac{1}{\sin x}. \tag{4.1}$$

これらをそれぞれ **余接** cotangent, **正割** secant, **余割** cosecant という[1] これらの記号は，たとえば

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

のように使う．

■逆三角関数

定義 4.1.
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \cos y$ $(0 \leqq y \leqq \pi)$ をみたす y を $y = \cos^{-1} x$ と書く．
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \sin y$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$ をみたす y を $y = \sin^{-1} x$ と書く．
- 与えられた実数 x に対し $x = \tan y$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ をみたす y を $y = \tan^{-1} x$ と書く．

これら $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ をそれぞれ**逆余弦関数** arc cosine, **逆正弦関数** arc sine, **逆正接関数** arc tangent といい，これらをまとめて**逆三角関数** inverse triangular functions とよぶ．

注意 4.2.
- これらを arccos, arcsin, arctan とも書くこともある．
- 逆三角関数の値の範囲を制限せずに，例えば "$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数)" のように厳密な意味では関数にならない "多価関数" とみなすこともある． このとき，定義 4.1 の逆三角関数を "逆三角関数の主値" といい，$\mathrm{Cos}^{-1} x$, $\mathrm{Arccos}\, x$ などと書くこともある．

2013 年 4 月 30 日（自習用）

[1]余割 cosecant は "cosec" と書くこともある．

合成関数の微分公式を用いれば，次の逆三角関数の微分公式を得る：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ &\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

実際，$y = \cos^{-1} x$ とすると $x = \cos y$ であるから，逆関数の微分公式から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{-1}{\sin y}.$$

ここで $0 \leqq y \leqq \pi$ だから，$\sin y \geqq 0$ なので $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ なので第一式を得る．第二式も同様にやればよい．

また，$\tan^{-1} x$ の微分公式を得るには

$$\frac{d}{dy}\tan y = 1 + \tan^2 y$$

を用いればよい[2]．

ただし $x = \pm 1$ で $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ は微分可能でない．逆余弦関数と逆正弦関数の導関数は符号が違うだけだが，これは，恒等式

$$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} \tag{4.3}$$

による．

実際，$\alpha = \cos^{-1} x$, $\beta = \sin^{-1} x$ とすれば，$\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$ などに注意すれば

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = 1.$$

一方 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}$ だから $-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha + \beta \leqq \frac{3\pi}{2}$．したがって $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$，すなわち (4.3) が得られた．

公式 (4.2) と $\tan^{-1} 0 = \sin^{-1} 0 = 0$ から

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt, \qquad \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \tag{4.4}$$

が成り立つことがわかる．

[2]正接関数 $\tan x$ の微分公式は $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ と覚えるのがよい．$(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ と覚えるよりも計算がやりやすいはず．

■初等関数　多項式，冪関数 (x^α の形．冪乗根を含む)，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数に加減乗除，合成の操作を**有限回**施すことによって得られる関数を**初等関数**という．初等関数はその定義域に含まれる開区間上で C^∞-級である．

微分公式から，初等関数の導関数は初等関数であることがすぐにわかるが，初等関数の原始関数は初等関数であるとは限らない．原始関数が初等関数で表されるような積分計算の基本テクニックを演習問題に挙げておく．

■双曲線関数

定義 4.3. 実数 x に対して

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

をそれぞれ x の**双曲的余弦** hyperbolic cosine, **双曲的正弦** hyperbolic sine, **双曲的正接** hyperbolic tangent とよび，これらを**双曲線関数** hyperbolic functions という．

注意 4.4. 双曲的余弦 $\cosh t$ と，角度 ht の余弦 $\cos ht$ を混同しないように．印刷物であれば，立体と斜体のフォントの使い分けで 明確に区別できる．

双曲線関数の性質：

- 恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ[3]．とくに $\bigl(x(t), y(t)\bigr) = (\cosh t, \sinh t)$ は (x, y) 平面の双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の右半分のパラメータ表示となる．これが双曲線関数の名前の由来である．一方，三角関数は円のパラメータ表示を与えることから “円関数” circular functions と呼ばれることがある．

[3] 三角関数と同様に $\cosh^2 x$ は $(\cosh x)^2$ を表す．

- 加法定理

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

  が成り立つ．

- 微分公式

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x$$

  が成り立つ．

- 関数 $u(t) = A\cosh t + B\sinh t$ は微分方程式 $u'' = u$ の，初期条件 $u(0) = A$, $u'(0) = B$ を満たす解である．(微分方程式を $u'' = -u$ とすると，$u = A\cos t + B\sin t$ が解になる．)

◆ 余談：円周率の近似

実数 t に対して，初項 1, 公比 $-t^2$ の等比級数の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^N t^{2N} = \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^N t^{2N+2}}{1+t^2}$$

を $t = 0$ から x まで定積分すると，

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x)$$
$$\left(R_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt\right)$$

を得る．ここで

$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \leqq \int_0^{|x|} t^{2N+2}\,dt = \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$
$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \geqq \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+x^2}\,dt = \frac{1}{2N+3}\frac{|x|^{2N+3}}{1+x^2}$$

なので，

(4.5)

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+1} x^{2N+1} + R_N(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right) + R_N(x)$$

$$\frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)(1+x^2)} \leqq |R_N(x)| \leqq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

が成り立つ．これは後期に扱うテイラーの定理の特別な場合である．とくに $|x| \leqq 1$ とすると

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき})$$

が成り立つので，逆正接関数の級数表示

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \tag{4.6}$$

が得られた．

とくに (4.6) で $x = 1$ とすると，ライプニッツの式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \tag{4.7}$$

が得られる．この右辺を適当な項まで計算すれば，円周率の近似値が得られる．誤差の項を $\widetilde{R}_N$ とすると (4.5) の $R_N(1)$ の形から

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+3}\right) + \widetilde{R}_N, \qquad \frac{2}{2N+3} \leqq |\widetilde{R}_N| \leqq \frac{4}{2N+3}$$

が成り立つことがわかる．この式を用いて円周率を小数 100 位まで求めることを考えよう：誤差 $|\widetilde{R}_N|$ は 10^{-100} を超えないようにするには $N \geqq 10^{100} - \frac{3}{2}$ が必要，$N \geqq 2 \times 10^{100} - \frac{3}{4}$ が十分である (!).

ここで，次の等式 (マチンの公式) を思い出そう：

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \tag{4.8}$$

公式 (4.5) を用いると，$\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{239}$ として

$$\pi = 4\left(\sum_{k=0}^{M} \frac{4(-1)^k \alpha^k}{2k+1} - \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j \beta^j}{2j+1}\right) + R_{M,N},$$

$$|R_{M,N}| \leqq \frac{16\alpha^{2M+1}}{2M+1} + \frac{4\beta^{2N+1}}{2N+1}$$

となる．とくに $R_{M,N}$ が 10^{-100} を超えないためには $M = 100$, $N = 20$ くらいあれば十分である．公式 (4.7) を用いた計算 (10^{100} 項くらい必要) と比較せよ．

問題 4

4-1 逆三角関数，正割，余割，余接関数のグラフを描きなさい．

4-2 式 (4.2)，(4.3) の証明をきちんと書きなさい．

4-3 双曲線関数について

- $\cosh x \geqq 1$, $-1 < \tanh x < 1$ であることを確かめなさい．
- $\cosh x$ は偶関数，$\sinh x$, $\tanh x$ は奇関数であることを確かめなさい．
- グラフ $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$ を描きなさい．
- 三角関数に倣って，双曲線関数の 2 倍角の公式，3 倍角の公式，半角の公式，積和公式，和積公式をつくりなさい．
- $t = \tanh \frac{u}{2}$ とおいたとき，$\cosh u$, $\sinh u$ を t の有理式で表しなさい．このことを用いて，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上に，x 座標，y 座標がともに有理数であるような点がたくさんあることを確かめなさい．
- A, B を定数とするとき，$A\cos t + B\sin t$ は $r\cos(t+\alpha)$, $r\sin(t+\beta)$ の形に表すことができる (合成公式)．これに倣って，双曲線関数の合成公式をつくりなさい．
- $x \geqq 1$ を満たす x に対して，$x = \cosh y$, $y \geqq 0$ を満たす y を $y = \cosh^{-1} x$ と書くと

$$\cosh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\bigr)$$

となることを確かめなさい．同様に $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ を定義し，

$$\sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2 + 1}\bigr), \qquad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

であることを確かめなさい．

4-4
- 等式 $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$. を示しなさい．
- 上の式に (4.5) を適用して π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい．
- マチンの公式 (4.8) が成り立つことを確かめなさい．

4-5
- $\log x = (x)' \log x$ であることを用いて $\log x$ の原始関数を求めなさい．
- $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ の原始関数を求めなさい．

4-6 負でない整数 n に対して $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ とおく．とくに $n \geqq 2$ のとき $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つことを示し，

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{2m-1}{2m}\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n = 2m), \\[2ex] \dfrac{2m}{2m+1}\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdots\dfrac{2}{3} & (n = 2m+1) \end{cases}$$

であることを確かめなさい．ただし m は正の整数である．さらに $\sin^n x$ の積分についても同様のことを行いなさい．

4-7 $\sqrt{1-x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい．

- $x=\sin\theta$ と置換する．
- $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ と置換する．

4-8 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+4)^2$ とするとき，$1/f(x)$ の原始関数を求めなさい (部分分数分解)．

4-9 定数 a, b に対して $1/(x^2-2ax+b)$ の原始関数を次の場合に求めなさい．

- $a^2-b=0$ の場合, すなわち $1/(x+a)^2$ の原始関数.
- $a^2-b>0$ の場合 (部分分数分解).
- $a^2-b<0$ の場合：$1/(1+u^2)$ の原始関数に帰着させる．

4-10 $1/\cos x$ $(=\sec x)$ の原始関数を，次の方法で求めなさい：

- $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換する．被積分関数は t の有理式なので，部分分数分解を用いることができる．
- $\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ とおいて $u=\sin x$ と置換する．
- $\frac{1}{\cos x}=\cosh u$ と置換する．

4-11 $\sqrt{1+x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい：

- $(x)'\sqrt{1+x^2}$ とみなして部分積分を行うことにより，$1/\sqrt{1+x^2}$ の積分に帰着する．
- $x=\tan\theta$ と置換する．
- $x=\sinh u$ と置換する．

4-12 次の関数の原始関数を求めなさい：

$$\frac{1}{x^4-1},\qquad \frac{1}{x^3-1},\qquad \frac{1}{x^4+1}.$$

4-13 地球 (半径 R メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもはどれくらい伸びるか．R を用いて表しなさい．さらに，R の具体的な値 (1 メートルが定義されたときのいきさつからすぐにわかる) を用いて，伸びを実際に求めなさい：関数電卓を用いるとどのような値になるか．その答えは何桁目まで正しいか．さらに，手計算で値を求めるためにはどうしたらよいか．