5　全微分・方向微分

■微分可能性の復習

定義 5.1. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で**微分可能**であるとは，うまく定数 A, B を選び，$(a+h, b+k) \in D$ となるような (h,k) に対して

$$(\star) \qquad f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

となるようにできることである．

命題 5.2. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能であって，$(\star)$ の定数 A, B は $A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$ でなければならない．

以上から，次のことがわかる：

定理 5.3. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で微分可能であるための必要十分条件は，f が (a,b) で偏微分可能で，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことである．

■全微分　関数 $f(x,y)$ が $P = (a,b)$ で微分可能であるとき，

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

で与えられる 2 次列ベクトル $(df)_P$ を**関数 f の点 P における全微分**または**微分**という．さらに，(x,y) に対して 2 次行ベクトル $\bigl(f_x(x,y), f_y(x,y)\bigr)$ を対応させる規則

$$(5.1) \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

2013 年 5 月 7 日 (2013 年 5 月 14 日訂正)

を f の**全微分**または**微分**という．

例 5.4. 関数 $\varphi(x,y) = x$, $\psi(x,y) = y$ に対して $d\varphi = (1,0)$, $d\psi = (0,1)$ である．このことを

$$dx = (1,0), \qquad dy = (0,1)$$

と書く．

この記号を用いれば (5.1) は

$$(5.2) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

と書くことができる．これが通常の全微分の表し方である．

命題 5.5. 2 変数関数 f が点 $P = (a,b)$ で微分可能なとき，

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = (df)_P\boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}| \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{h}| = \sqrt{h^2+k^2}$$

と書くと $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \varepsilon(\boldsymbol{h}) = 0$ が成り立つ．ただし $(df)_P\boldsymbol{h}$ は行ベクトルと列ベクトルの積として得られる 1×1 行列で，これをスカラとみなしている[1]．

■曲線に沿う微分　数直線上の区間 I 上で定義された 1 変数関数 $x(t)$, $y(t)$ の組 $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ は I から座標平面 $\mathbb{R}^2$ への写像と思える：

$$\gamma\colon I \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \in \mathbb{R}^2.$$

このような写像を**曲線**あるいは**曲線のパラメータ表示**という．以下，曲線と言えば $x(t)$, $y(t)$ が微分可能となるもののみを考える[2]．このことをとくに断るときは "γ は微分可能" という．

[1] ここで (x,y) の (a,b) からの変化 (h,k) を，行ベクトルではなく列ベクトル ${}^t(h,k)$ で表すことに注意．"行列を掛ける" という文脈ではベクトルは普通列ベクトルで表す．この記法に合わせるならば $\boldsymbol{x} = {}^t(x,y)$ と列ベクトルで表し，$f(x,y)$ の代わりに $f(\boldsymbol{x})$ と書くのが自然．このとき，命題の式は

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = (df)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

と書ける．この方がすっきりするはずだが，座標平面上の点の座標を横に並べる高等学校の教科書の記号を慮って，ここにあるような "まぜこぜ" な記号を用いた．

[2] だからといって γ が "なめらか" な曲線になるとは限らない．おなじみのサイクロイドを思い出そう．

曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ に対して

$$\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \bigl(\dot x(t), \dot y(t)\bigr) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を曲線上の点 $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ における**速度ベクトル**という[3].

さて，2 変数関数 $f(x, y)$ と曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ に対して

$$F(t) = f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \tag{5.3}$$

は，1 変数関数を与える．

命題 5.6. 2 変数関数 $f(x, y)$ と曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ がともに微分可能であるとき，(5.3) は微分可能で

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ．

証明． 実数 t を一つ固定して

$$\varepsilon_1(\delta) := \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} - \dot x(t), \qquad \varepsilon_2(\delta) := \frac{y(t+\delta) - y(t)}{\delta} - \dot y(t)$$

とおけば，x, y の微分可能性より $\delta \to 0$ のとき $\varepsilon_j(\delta) \to 0$ $(j = 1, 2)$．さらに

$$h(\delta) := \delta\bigl(\dot x(t) + \varepsilon_1(\delta)\bigr), \qquad k(\delta) := \delta\bigl(\dot y(t) + \varepsilon_2(\delta)\bigr)$$

とおけば，$\delta \to 0$ のとき h, $k \to 0$ が成り立つ．これらの記号を用いて，f の微分可能性に注意すれば，

$$\begin{aligned} F(t+\delta) - F(t) &= f\bigl(x(t+\delta), y(t+\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\ &= f\bigl(x(t) + h(\delta), y(t) + k(\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)h(\delta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)k(\delta) + \varepsilon\bigl(h(\delta), k(\delta)\bigr)\sqrt{h(\delta)^2 + k(\delta)^2} \end{aligned}$$

となる．ただし $\varepsilon(h, k)$ は $(h, k) \to (0, 0)$ のときに 0 に近づく関数である．この式の両辺を δ で割って $\delta \to 0$ とすると結論が得られる． □

[3]速度 velocity と速さ speed の違いは説明しなくてよいですよね．

命題 5.6 の結論の式は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (df)\dot\gamma$$

などと書くことができる．ここで，速度ベクトル $\dot\gamma$ は列ベクトルとみなしている．

■方向微分 列ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ と点 $P = (a, b)$ に対して $\gamma(t) = {}^t(a + tv_1, b + tv_2) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{a} = {}^t(a, b)$) とおくと， $\gamma(t)$ は $t = 0$ で点 P を出発し，一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で動く運動とみなすことができる．この γ と，点 P のまわりで定義された 2 変数関数 f に対して (5.3) で定義される $F(t)$ を考えると，

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v_2 = (df)_P\boldsymbol{v} \tag{5.4}$$

となることがわかる．この右辺の量を，関数 f の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**という．

■勾配ベクトル 点 $P = (a, b)$ の近くで定義された微分可能な関数 f に対してベクトル

$$\operatorname{grad} f_P := \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

のことを f の P における**勾配ベクトル** gradient vector という[4]．これを用いると，方向微分 (5.4) は

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \bigl((\operatorname{grad} f)_P\bigr)\cdot\boldsymbol{v}$$

と内積 “$\cdot$” を用いて表すことができる．

[4]全微分 $(df)_P$ は行ベクトルだったが，それを “縦に並べかえた” だけ．

問題 5

5-1 2 変数関数が f が "標高を表すスカラ場", 曲線 $\gamma(t)$ が，時刻 t とともに移動する人の運動と思うとき，式 (5.3) で表される一変数関数はどのようなものか，説明しなさい．

5-2 平面上の点 (x, y) における標高が，多項式 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ で表されているような世界があるとする．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くとき，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる区間を指摘しなさい．ヒント：考えている旅は $\gamma(t) = \bigl(\cos t, \sin t\bigr)$ となる．

5-3 点 $P = (a, b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0, 0)$ でないとする．このとき，f の点 P における単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分 $(df)_P\boldsymbol{v}$ が最大になるのは $\boldsymbol{v}$ が $(\operatorname{grad}_f)_P$ と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント：$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであることに注意．$\boldsymbol{v} = {}^t(\cos t, \sin t)$ と表される．

5-4 点 $P = (a, b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0, 0)$ でないとする．点 P を通る f の等高線を $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ $(\gamma(0) = P)$ とパラメータ表示するとき，$t = 0$ における γ の速度ベクトル $\dot\gamma(0)$ は $(\operatorname{grad} f)_P$ に直交することを示しなさい．すなわち，"等高線は勾配ベクトルに直交する"．

5-5 関数 f を次のように定義する：

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (y = x^2 \quad \text{かつ} \quad x \neq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

すると，$\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ に対して，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\bigl(tv_1, tv_2\bigr)$$

は 0 になることを示しなさい．f は原点で連続か．