6　合成関数の微分公式

■合成関数の微分 (チェイン・ルール)

命題 6.1 (合成関数の微分公式 (命題 4.6 再録)). 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ と，像が D に含まれる曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ がともに微分可能であるとき，一変数関数
$F(t) = f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ は微分可能で,

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ.

偏微分の意味を考えれば，命題 6.1 から直ちに次のことがわかる：

系 6.2 (チェイン・ルール). 2 変数関数 $f(x,y)$ と，2 つの 2 変数関数の組

$$x = x(\xi,\eta), \qquad y = y(\xi,\eta)$$

がともに微分可能であるとき，2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi,\eta) = f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)$$

は微分可能で,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)$$

が成り立つ.

注意 6.3. 物理学や工学では，系 6.2 の $\tilde{f}(\xi,\eta)$ のことを $f(\xi,\eta)$ のように $f(x,y)$ と同じ f を用いて表すことがある．文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である．このとき (適当に省略をして) 系 6.2 の結論の式を

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

2013 年 5 月 14 日

と表すことができる．あるいは，従属変数に名前をつけて

$$z = f(x,y) = f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr) = \tilde{f}(\xi,\eta)$$

と書いたとき，チェイン・ルールを

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と書くこともできる.

■$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像とその微分　正の整数 m に対して，m 個の実数の組全体の集合を $\mathbb{R}^m$ と書くのであった (講義資料 1, テキスト 3 ページ)．領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ を考える．ただし n も正の整数である．この写像は D の各点 $(x_1,\dots,x_m)$ に対して $\mathbb{R}^n$ の要素 $F(x_1,\dots,x_m)$ を対応させる対応の規則である．$y = F(x_1,\dots,x_m)$ とおくと $\mathbb{R}^n$ の要素であるから，n 個の実数の組であり，それを $(y_1,\dots,y_n)$ と書けばそれぞれの成分 y_j は $(x_1,\dots,x_m)$ によって定まる一つの実数である．すなわち y_j は $(x_1,\dots,x_m)$ の関数となっている．以上の考察から[1] 写像 $F\colon \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ とは領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義された n 個の関数の組とみなすことができる：

$$(6.1)\quad \begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^m \supset D \ni (x_1,\dots,x_m) \\ \longmapsto \bigl(F_1(x_1,\dots,x_m),\dots,F_n(x_1,\dots,x_m)\bigr) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

ただし $F_j\colon D \to \mathbb{R}$ $(j = 1,\dots,n)$ は D 上で定義された関数であり，F の成分とよぶ．写像 F の成分が F_j $(j = 1,\dots,n)$ であることを $F = (F_1,\dots,F_n)$ と書くことにしよう.

写像 $F = (F_1,\dots,F_n)\colon \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ が C^r**-級** であるとは[2]，各 j に対して関数 $F_j\colon D \to \mathbb{R}$ が C^r-級 (講義資料 3 参照) となることである.

定義 6.4. 領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義された C^1-級の写像 $F = (F_1,\dots,F_n)\colon D \to$

[1] 以下のことが最初から当たり前と思える人はそんな考察をしなくてもよい

[2] 本当は微分可能性から定義していくべきだが，簡単のため C^r-級の概念だけを定義しておく．こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない.

$\mathbb{R}^n$ に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \qquad (n \times m\text{行列})$$

を F の**微分** differential または**ヤコビ行列** Jacobian matrix という．ただし $(x_1, \ldots, x_m)$ は $D \subset \mathbb{R}^m$ の座標である．

■合成写像とその微分　写像 $F\colon \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ と $G\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^k$ が与えられ，かつ任意の $\boldsymbol{x} \in D$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \in U$ が成り立つとき，

$$G \circ F\colon \mathbb{R}^m \supset D \ni x \longmapsto G\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr) \in \mathbb{R}^k$$

で与えられる写像 $G \circ F\colon \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^k$ を F と G の**合成写像**という．

命題 6.5. 上の状況で，F, G がともに C^1-級ならば

$$d(G \circ F) = dG\, dF, \qquad \text{すなわち} \qquad d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr)\, dF(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ただし右辺の積は行列の積を表す．

■逆写像　領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ の各点 $\boldsymbol{x}$ に対してそれ自身を対応させる対応の規則

$$\mathrm{id}_D\colon D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{id}_D(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \in D$$

を D 上の**恒等写像** identity map という．

領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ から $U \subset \mathbb{R}^m$ への写像 $F\colon D \to U$ に対して，写像 $G\colon U \to D$ で

$$G \circ F = \mathrm{id}_D, \qquad F \circ G = \mathrm{id}_U$$

を満たすものが存在するとき，G を F の**逆写像** inverse map といい，$G = F^{-1}$ と書く．

例 6.6. 領域

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$$

に対して

$$F\colon D \ni (r,\theta) \longmapsto F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in U,$$
$$G\colon U \ni (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \in D$$

とすると $G = F^{-1}$, $F = G^{-1}$ である．実際，$r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意すれば

$$G \circ F(r,\theta) = G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}, \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)$$
$$= (r, \tan^{-1}\tan\theta) = (r,\theta),$$

一方，$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ とすると $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos\theta > 0$．したがって，$x > 0$ に注意して

$$\cos\tan^{-1}\frac{y}{x} = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\tan^{-1}\frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}$$
$$= \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

したがって

$$F \circ G(x,y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$
$$= \left(\sqrt{x^2+y^2}\cos\tan^{-1}\frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2}\sin\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = (x,y).$$

注意 6.7. 座標平面上の点 (x,y) に対して例 6.6 のように $(r,\theta) = G(x,y)$ と定めるとき，(r,θ) を座標平面の**極座標** polar coordinate system という[3]．これに対して，(x,y) を**直交座標系**あるいは**デカルト座標系** Cartesian coordinate system という．

命題 6.8. 写像 $F\colon \mathbb{R}^m \supset D \to U \subset \mathbb{R}^m$ が逆写像 $G = F^{-1}$ をもち，F, F^{-1} ともに C^1-級ならば

$$dF^{-1} = (dF)^{-1} \qquad \text{すなわち} \qquad d(F^{-1})\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr) = \bigl(dF(\boldsymbol{x})\bigr)^{-1}$$

[3] 偏角 θ の変域は $-\pi < \theta < \pi$ まで拡張することができる．

が成り立つ．ただし右辺の “-1” は m 次正方行列の逆行列を表す．

証明． 恒等写像の微分が単位行列 E となることに注意して，$F^{-1}\circ F=\mathrm{id}_D$ に命題 6.5 を適用すれば $dF^{-1}dF=E$, また $F\circ F^{-1}=\mathrm{id}_U$ に命題 6.5 を適用すれば $dFdF^{-1}=E$. したがって dF^{-1} は dF の逆行列である (逆行列の定義). □

■変数変換

例 6.9 (平面極座標とラプラシアン)**.** 例 6.6 の状況を考える：

$$x=x(r,\theta)=r\cos\theta,\qquad y=y(r,\theta)=r\sin\theta. \tag{6.2}$$

このとき $F\colon(r,\theta)\mapsto(x,y)$ の微分は

$$dF=\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} \tag{6.3}$$

である．一方，逆写像 $G=F^{-1}\colon(x,y)\mapsto(r,\theta)$ は $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ と表されているから

$$dG=\begin{pmatrix}r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix} \tag{6.4}$$

となる．

平面上の C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta z=\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{6.5}$$

を対応させる Δ を**ラプラス作用素** Laplacian[4]という．いま，$f(x,y)$ を (6.2) によって (r,θ) の関数とみなしたとき，Δf を f の r, θ に関する偏導関数を用いて表そう．

[4]物理学や工学では至るところに現れる．

式 (6.4) とチェイン・ルール (系 6.2) を用いれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=r_x\frac{\partial f}{\partial r}+\theta_x\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_r-\frac{y}{x^2+y^2}f_\theta\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_r-\frac{y}{x^2+y^2}f_\theta\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)f_r+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f_r}{\partial x}\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)f_\theta-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial f_\theta}{\partial x}\\
&=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_r+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_{rr}-\frac{y}{x^2+y^2}f_{r\theta}\right)\\
&\qquad+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_\theta-\frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_{\theta r}-\frac{y}{x^2+y^2}f_{\theta\theta}\right)\\
&=\frac{x^2}{x^2+y^2}f_{rr}-\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_{r\theta}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}f_{\theta\theta}\\
&\qquad+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_r+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_\theta.\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\frac{y^2}{x^2+y^2}f_{rr}+\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_{r\theta}+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}f_{\theta\theta}\\
&\qquad+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_r-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_\theta.
\end{aligned}$$

したがって $r=\sqrt{x^2+y^2}$ に注意すれば

$$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$$

となる．

例 6.10. 例 6.9 を少し異なった方法で計算しよう：上の記号をそのまま用いると，命題 6.8 をもちいれば

$$dG=d(F^{-1})=(dF)^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{pmatrix} \tag{6.6}$$

である．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

これを用いれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2\theta f_{rr} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta}\\ &\qquad + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta f_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2\theta f_{rr} + \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta}\\ &\qquad + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta f_r - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta\end{aligned}$$

なので，例 6.9 と同じ結果を得る．

問題 6

6-1 命題 6.5 の結論の式を成分を用いて表しなさい．

6-2 命題 6.1 は命題 6.5 の特別な場合であることを確かめなさい．

6-3 例 6.6 の状況を絵に描きなさい．

6-4 平面のスカラ場 $f(x,y)$ が $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$ をみたしているとき，f を**調和関数**という．

- 一変数関数 $F(t)$ を用いて $f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2})$ の形に表される調和関数をすべて求めなさい．
- $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ は調和関数であることを確かめなさい．

6-5 定数 c $(\neq 0)$ に対して

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct$$

により変数変換 $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ を定める．このとき，C^2-級関数 $f(t,x)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}$$

となることを確かめなさい．

さらに，$f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$ を満たす C^2-級関数 f は，2 つの C^2-級の一変数関数 F, G を用いて

$$f(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

という形に書けることを示しなさい．
方程式 $f_{tt} = c^2 f_{xx}$ を**波動方程式**という．ここに述べたことを，“波動方程式の d'Alembert の解法” という．

6-6 空間のスカラ場 $f(x,y,z)$ に対して $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ を対応させる Δ を空間の**ラプラス作用素**という．空間の変数変換

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi$$
$$\left(r > 0, -\pi < \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

に対して

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi} & \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} & 0 \\ -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

であることを確かめ，

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r}f_r + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r^2}\tan\varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい．