7 陰関数の微分法

■陰関数 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された二変数関数 $f(x,y)$ に対して，式

$$f(x,y)=0 \tag{7.1}$$

は x と y の関係式である．この関係式を "y について解く" ことができたとしよう：

$$f(x,y)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y=\varphi(x).$$

このとき，与えられた（適当な範囲の） x に対して，(7.1) を満たす y がただ一つ存在する．すなわち (7.1) は "y は x の関数である" ということを暗に表している．このとき，(7.1) は $y=\varphi(x)$ の**陰関数** an implicit function 表示という．

例 7.1.
- $f(x,y)=2x-3y+5$ とすると，関係式 $f(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ ($\varphi(x)=\frac{1}{3}(2x+5)$) と書き換えることができる．したがって $f(x,y)=0$ は y は x の関数であることを表している．また，同じ関係式を解くことによって $x=\psi(y)=\frac{1}{2}(3y-5)$ となるので，$f(x,y)=0$ は x が y の関数であることも表している．
- $g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと，$g(x,y)=0$ は y について解くことができない．実際

$$g(x,y)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2=1-x^2$$

であるから，x を与えても対応する y は一般に一つには決まらない．
しかし，g の定義域を $U:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ に限って考えると

$$(x,y)\in U \text{ かつ } g(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\sqrt{1-x^2} \quad (-1<x<1)$$

となり y は x の関数とみなすことができる．
また， g の定義域を $U':=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<0\}$ に限って考えると $g(x,y)=0$ は関数

$$y=-\sqrt{1-x^2} \quad (-1<x<1)$$

を与える．
いずれの場合も x は y の関数とみなすことはできないが，たとえば $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$ に限れば $x=\sqrt{1-y^2}$ と考えることができる．

2013 年 5 月 21 日

同様に，3 変数以上の関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ に対して，$f(x_1,\dots,x_n)=0$ を変数 x_1 について解くことができ，$x_1=\varphi(x_2,\dots,x_n)$ とかけるとき，$f(x_1,\dots,x_n)=0$ を φ の陰関数表示という．

■陰関数定理 一般に $f(x,y)=0$ がいつ y について (x について) とけるかを判定するのは難しいが，次の十分条件が知られている：

定理 7.2 (陰関数定理の特別な場合)**.** 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された C^r-級関数 $F\colon D\to\mathbb{R}$ と点 $P=(x_0,y_0)\in D$ で $F(x_0,y_0)=0$ をみたしているものをとる．ただし $r=1,2,\dots,\infty$ とする．
もし，点 P において $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ が成り立っているならば，
- 点 P を含む開集合 $U\subset D$,
- ある $\mathbb{R}$ の開区間 I と C^r-級の一変数関数 $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$

で次を満たすものが存在する：

点 $(x,y)\in U$ が $F(x,y)=0$ を満たすならば $x\in I$ かつ $y=\varphi(x)$ が成り立つ．

とくに各 $x\in I$ に対して

$$F\bigl(x,\varphi(x)\bigr)=0 \tag{7.2}$$

が成り立つ．

この定理は，(x_0,y_0) の十分近くで，$F(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の形にとけることを表している．また，定理 7.2 の第 1 段落の仮定のもと，$F_x(x_0,y_0)\neq 0$ が成り立っているならば，$F(x,y)=0$ は $x=\psi(y)$ の形にとけることもわかる．
独立変数の個数が多いときも，定理 7.2 に対応する次が成り立つ：

定理 7.3. 正の整数 m に対して，領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ で定義された C^r-級関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ と点 $P = (a_1, \dots, a_m) \in D$ で $F(a_1, \dots, a_m) = 0$ をみたしているものをとる．ただし $r = 1, 2, \dots, \infty$ とする．

もし，点 P において $F_{x_m}(a_1, \dots, a_m) \neq 0$ が成り立っているならば，

- 点 P を含む開集合 $U \subset D$,
- ある $\mathbb{R}^{m-1}$ の領域 V と C^r-級の $(m-1)$-変数関数 $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$

で次を満たすものが存在する：

点 $(x_1, \dots, x_m) \in U$ が $F(x_1, \dots, , x_m) = 0$ を満たすならば $(x_1, \dots, x_{m-1} \in V$ かつ $y = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$ が成り立つ．

とくに各 $x \in I$ に対して

$$F\bigl(x_1, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})\bigr) = 0 \tag{7.3}$$

が成り立つ．

■なめらかな曲線　いま，集合 $C = \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$ 点（要素）P に対して，P を含む開集合 U をうまくとって C と U の共通部分 $C \cap U$ が C^∞-級関数のグラフと合同であるとき，C は P の近くで “なめらかな曲線” であるということにする．とくに 各点の近くでなめらかな曲線であるとき C を単に**なめらかな曲線** a smooth curve であるという．定理 7.2 から次がすぐにわかる：

命題 7.4. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 F に対して

$$C := \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$$

とおくとき，各点 $P \in C$ で $(dF)_P \neq (0, 0)$ ならば C はなめらかな曲線を与える．

注意 7.5. 命題 7.4 の逆は成立しない．実際 $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ とすると $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ は原点を中心とする半径 1 の円となり，なめらかな曲線を与えるが，C の各点で $dF = (0, 0)$ である．

例 7.6.

- いずれもが 0 でない定数 a, b に対して $\mathbb{R}^2$ で定義された関数

  $$F(x, y) = ax^2 + by^2 - 1$$

  を考えると $dF = (2ax, 2by)$ であるから，$dF_{(x,y)} = (0, 0)$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のときのみ．ここで $F(0, 0) = -1 \neq 0$ だから

  $$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

  上で $dF \neq (0, 0)$．したがって C はなめらかな曲線である．

- 関数

  $$F(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

  に対して

  $$dF_{(x,y)} = \bigl(2x(2(x^2 + y^2) - 1), 2y(2(x^2 + y^2) + 1)\bigr)$$

  だから $dF_{(x,y)} = (0, 0)$ となるのは

  $$(x, y) = (0, 0), \quad (1/\sqrt{2}, 0), \quad (-1/\sqrt{2}, 0)$$

  のときのみである．とくに $F(\pm 1/\sqrt{2}, 0) \neq 0$，$F(0, 0) = 0$ なので，

  $$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

  とすると $(0, 0)$ の近くをのぞいて C はなめらかな曲線である．

■陰関数の微分法

命題 7.7. 定理 7.2 の状況で得られた関数 $\varphi(x)$ に対して

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

が成り立つ．ただし $y = \varphi(x)$ である．

この定理の結論の式を

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

などと書くことがある．

証明．恒等式 $F(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分すると，チェイン・ルール（命題 5.6 または系 6.2）により

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}F\bigl(x,\varphi(x)\bigr) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{d\varphi(x)}{dx} \end{aligned}$$

となるが，定理 7.2 の状況で，考えている点の近くでは $F_y \neq 0$ が成り立っているから結論が得られる． □

同様に，陰関数 $F(x,y)=0$ が $x=\psi(y)$ と表せるとき

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\psi}{dy}(y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} \qquad (x=\psi(y))$$

が成り立つ．

例 7.8. 正の定数 a, b に対して

$$C = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, F(x,y)=0\bigr\} \qquad \left(F(x,y) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

は楕円である．C 上の点 $P=(x_0,y_0)$ におけるこの曲線の接線の方程式を求めよう．いま $y_0 \neq 0$ とすると $F_y(x_0,y_0) = 2y_0/b^2 \neq 0$ なので定理 7.2 が適用できて P の近くで C は関数のグラフ $y=\varphi(x)$ で表される．とくに $y_0=\varphi(x_0)$ に注意すれば，陰関数の微分公式 (命題 7.7) を用いて

$$\frac{d\varphi}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = -\frac{2x_0/a^2}{2y_0/b^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

したがって接線の方程式は

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{a^2}$$

となる．

一方 $y_0=0$ のときは $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ なので，x と y の役割を変えて考えれば上と同じ式で接線が表されることがわかる．

さらに変数の多い場合，すなわち定理 7.3 の状況でも

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_{m-1}) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_m)}{\dfrac{\partial F}{\partial x_m}(x_1,\dots,x_m)} \qquad \bigl(x_m = \varphi(x_1,\dots,x_{m-1})\bigr)$$

が各 $j=1,\dots,m-1$ に対して成立する．

◆ 一般の陰関数定理

この陰関数定理 7.3 は "m 個の変数が一つの関係式を満たしているならば,（適当な条件のもと）そのうち一つの変数について解くことができる" ということを表している．このことを一般に述べたのが次の陰関数定理である：

定理 (陰関数定理)**.** 領域 $D\subset\mathbb{R}^m$ 上で定義された k 個の C^r-級関数 F_1, ..., F_k $(k<m)$ が与えられているとする．点 $P=(a_1,\dots,a_m)$ が

$$F_j(a_1,\dots,a_m)=0 \qquad (j=1,\dots,k)$$

を満たし，かつ

$$(*) \qquad \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_k}(P) \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つならば，P を含む D の領域 U，点 $(a_{k+1},\dots,a_m)$ を含む $\mathbb{R}^{m-k}$ の領域 V および V 上で定義された k 個の C^r-級関数 φ_1, ..., φ_k で，次を満たすものが存在する：

点 $(x_1,\dots,x_m)\in U$ が

$$F_1(x_1,\dots,x_m) = \cdots = F_k(x_1,\dots,x_m)$$

を満たしているならば，$(x_{k+1},\dots,x_m)\in V$ で

$$x_1 = \varphi_1(x_{k+1},\dots,x_m),\dots,x_k = \varphi_k(x_{k+1},\dots,x_m)$$

が成り立つ．

とくに

$$F\bigl(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_m),\dots,\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_m)\bigr)$$

が成立する．

すなわち “m 個の変数が k 個の関係式を満たしているならば，適当な条件のもと k 個の変数はのこりの $(m-k)$ 個の変数の関数となる”．

ここでは “x_1, ..., x_k について解ける” という形で定理の主張を述べたが，実際には変数の順番を変えたバージョンを用いることがある．命題 7.4 のように，どの変数かを特定しないなら条件 $(*)$ は

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_m}(P) \end{pmatrix} = k$$

と書くことができる．命題 7.4 に対応する結論は，

$$\{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m \mid F_j(x_1,\dots,x_m)=0, j=1,\dots,k\}$$

は点 P の近くで $\mathbb{R}^m$ の**なめらかな部分多様体になる**と述べられるが，多様体を真面目に定義するのは大変なので，この講義ではそれ以上言及しない．

陰関数定理は，次の逆関数定理から示すことができる：

定理 (逆写像定理)．領域 $D\in\mathbb{R}^m$ 上で定義された C^r-級写像

$$f=(f_1,\dots,f_m)\colon \mathbb{R}^m\supset D\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

が，点 $P\in D$ において

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(P) \end{pmatrix} \neq 0$$

を満たしているならば，P を含む領域 $U\in D$ と $f(P)$ を含む $\mathbb{R}^m$ の領域 V，および V で定義された C^r-級写像 $g\colon V\to\mathbb{R}^m$ で $f\circ g(y)=y$ $(x\in V)$, $g\circ f(x)=x$ $(x\in U)$ を満たすもの，すなわち f の逆写像が存在する．

前回は，このことを暗黙のうちに認めていた．証明はここでは紹介しない．逆写像定理を用いて陰関数定理を示すには，与えれた写像 $F=(F_1,\dots,F_k)\colon\mathbb{R}^m\supset D\to\mathbb{R}^k$ に対して

$$f=(F_1,\dots,F_k,x_{k+1},\dots,x_m)\colon\mathbb{R}^m\supset D\to\mathbb{R}^m$$

に対して逆関数定理を適用すればよい（詳細はここでは扱わない）．

問題 7

7-1 定理 7.2 から命題 7.4 を導きなさい．

7-2 $F(x,y)=x^2-y^3$ とするとき $F(x,y)=0$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合はなめらかな曲線であるかを調べ，この図形の概形を描きなさい．

7-3 定理 7.2 の状況，すなわち $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$ の点 $P=(x_0,y_0)$ において $F_y\neq 0$ であり，P の近くで C がグラフ $y=\varphi(x)$ と表されているとする．このとき

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi''(x)=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つことを示しなさい．ただし，右辺の F_{xx} などは $(x,\varphi(x))$ における値を表す．

7-4 定数 b に対して

$$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)-b,\quad C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$$

とおく．このとき C がグラフ $y=\varphi(x)$ と書けるような範囲を調べ，そこでの φ の増減，変曲点を調べ C の概形を描きなさい（ヒント：b の値によって場合分けが起きる）．