9　一変数関数の積分再論

■区間の分割　閉区間 $[a,b]$ の**分割**とは，有限個の実数の列

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\} \qquad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b)$$

のことである．分割 Δ の**幅**とは

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$$

で定まる正の数のこととする．

■定積分　区間 $I = [a,b]$ で定義された一変数関数 f と，区間 I の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1} \tag{9.1}$$

と定める．ただし

$$\bar{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最大値”}),$$
$$\underline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最小値”})$$

とする．

定義 9.1. 区間 I で定義された関数 f が I で**積分可能** integrable である，とは I の分割 Δ の幅をどんどん小さくしていったとき $\overline{S}_\Delta$, $\underline{S}_\Delta$ の値が同じ値に近づくことである．このとき，その値を

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

例 9.2. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

2013 年 6 月 4 日

とする．分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ には有理数も無理数も含まれるので

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 1(x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = 1, \quad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-1}) = 0$$

したがって f は $[0,1]$ で積分可能でない．

例 9.3. 区間 $[-1,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える．$[-1,1]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_N\}$ に対して番号 $k = k(\Delta)$ を $0 \in [x_{k-1}, x_k]$ となるようにとると，f の最大値は，区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で 1，それ以外の小区間では 0 になる．また f の最小値は 0 だから，

$$\overline{S}_\Delta(f) = x_k - x_{k-1} \qquad \bigl(k = k(\Delta)\bigr), \qquad \underline{S}_\Delta(f) = 0.$$

ここで $0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ だから，$|\Delta|$ をどんどん小さくしていくと $\overline{S}_\Delta(f)$ は 0 に近づく．したがって，f は $[-1,1]$ で積分可能で

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

である．

記号の約束として $b < a$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定める．

■連続関数の積分可能性と微積分の基本定理

定理 9.4. 閉区間 $I = [a,b]$ で定義された**連続関数** f は I で積分可能である．

定理 9.5 (微積分の基本定理)**.** 区間 $I = [a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

とおくと F は I で微分可能で $F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

■原始関数と積分 (定積分) の計算　一変数関数 f の**原始関数**とは $F'(x) = f(x)$ となる関数 F のことである．

区間 I で定義された関数 f の 2 つの原始関数 F, G は $G(x) = F(x) +$ 定数を満たす．実際，

$$\frac{d}{dx}\bigl\{G(x) - F(x)\bigr\} = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

なので $G(x) - F(x)$ は I で定数である．すなわち，

> 区間 I で定義された関数 f の原始関数は，定数の差をのぞいてただ一つ定まる．

命題 9.6. 区間 I で連続な関数 f には原始関数が存在する．

証明． 区間 I 内の点 a を一つ固定して

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

とおけばよい． □

例 9.7. 関数 e^{-x^2} の原始関数は (定数だけの差をのぞいて) $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ である．

連続関数 f に対して，その原始関数が $F(x)$ であることを

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

とかく[1]

命題 9.8. 区間 I で連続関数 f の一つの原始関数を F とするとき，I の点 a, b に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．

[1] "$+C$" と積分定数を書くこともある．

■曲線の長さ (道のり)

命題 9.9. 区間 $[a, b]$ で定義された C^1-級関数 f のグラフの長さ (弧長) は

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられる．

証明． 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_N))$ を結ぶ折れ線の長さは

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j - x_{j-1})$$

で与えられる．ここで，平均値の定理から

$$\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = f'(\xi_j) \qquad x_{j-1} < \xi_j < x_j$$

を満たす ξ_j が存在するから，

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2}\,(x_j - x_{j-1}) \leqq \sum_{j=1}^N \overline{F}_j \Delta_j, \qquad I_\Delta \geqq \sum_{j=1}^N \underline{F}_j \Delta_j$$

となる．ただし $F(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ とすると

$$\overline{F}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } F \text{ の最大値}),$$
$$\underline{F}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } F \text{ の最小値}),$$

$\Delta_j = x_j - x_{j-1}$ である．ここで $F(x)$ は連続関数だから，$|\Delta|$ を 0 に近づけると I_Δ は $F(x)$ の a から b までの積分に一致する． □

系 9.10. パラメータ t により $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$ と表示された平面上の C^1-級曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

問題 9

9-1 高等学校の教科書では，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

と定義していることが多い．ここではそのような定義を採用しなかった．その理由を挙げなさい．

9-2 楕円 $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ について，

- E が囲む平面の部分の面積は πab である．
- E の長さは

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt, \qquad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

  で与えられる．
- 地球の地軸を含む平面による切り口は，赤道方向に長軸，地軸方向に短軸をもつ楕円になる．赤道方向の半径は 6377.397km，極方向の半径は 6356.079km とするときこの楕円の周の長さの近似値を求めなさい．（ヒント：近似式 $\sqrt{1-x} \fallingdotseq 1 - \frac{x}{2}$ (x が小さいとき) を用いる．40003.5 ± 0.1km くらいになるはず．）

9-3 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の第一象限の部分の 1 点を $P(x, y)$ とする．$O(0,0)$, $A(1,0)$ とするとき，線分 OA, OP, および双曲線の弧 AP で囲まれた部分の面積を $t/2$ とするとき，P の座標 x, y を t で表しなさい．

9-4 放物線 $y = x^2$ の $0 \leqq x \leqq a$ に対応する部分の長さを求めなさい．

9-5 サイクロイド

$$\gamma(t) = \bigl(t - \sin t, 1 - \cos t\bigr)$$

の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれる図形の面積， および弧の長さを求めなさい．

9-6 空間の半径 R の球体がある．中心からの距離 r における球体の (体積) 密度が $\rho = \rho(r)\mathrm{kg/m^3}$ で与えられるとき，球体の質量を ρ を用いて表しなさい．ただし ρ は $[0, R]$ で定義された連続関数である．