

# 1 多変数関数

## 1.1 1 変数関数 (復習)

高等学校で学んだ微分・積分は、関数に対する操作であった。

一般に(ある範囲の)数  $x$  に対して、ひとつの数  $f(x)$  を対応させる対応の規則  $f$  を(1 変数)関数 a function<sup>1</sup> という。このとき、考える  $x$  の範囲を関数  $f$  の定義域 the domain, 値  $f(x)$  として想定している数の範囲を  $f$  の値域 the range という。また、 $x$  が関数  $f$  の定義域全体を動くとき、値  $f(x)$  が動く値域の中の範囲を  $f$  の像 the image とよぶ。

実数の集合と区間 関数の定義域, 値域, 像を表現するために集合の言葉  
を復習しておく。数学的な対象のあつまりを集合 a set という。これでは何  
が集合かがきちんと判別できないが, この授業で扱う範囲では, 対象がきち  
んと述べられるのでとくに曖昧になることはないはずである。

実数 real numbers 全体の集合を  $\mathbb{R}$  と書く<sup>2</sup>。実数の概念を数学的に満足  
な形で書き表すのは易しくないが, それは後期の授業に先送りし, ここでは  
数直線上にめもることができる数という程度の理解でとりあえず先に進もう。

一般に対象  $x$  が集合  $X$  の要素 an element であるということ “ $x \in X$ ”  
と表す。たとえば “ $x \in \mathbb{R}$ ” とは “ $x$  は実数全体の集合の要素” すなわち “ $x$   
は実数” であることを表している。

集合  $X$  のいくつかの要素を集めて得られる集合を  $X$  の部分集合 a subset  
という。もう少し正確に述べると,

集合  $Y$  が  $X$  の部分集合である, とは  $Y$  の任意の要素 an  
arbitrary element が  $X$  の要素となっていることである。

集合  $Y$  が  $X$  の部分集合であることを, 記号  $Y \subset X$  で表す<sup>3</sup>。すなわち

$$Y \subset X \iff \text{“}y \in Y \text{ ならば } y \in X\text{”}$$

2013 年 4 月 9 日 (2013 年 4 月 16 日訂正)

<sup>1</sup> かんすう「函数」と書くこともある。語源からすればこれが正しいのかも知れない。

<sup>2</sup> 大文字の “ $R$ ”。印刷では “ $\mathbb{R}$ ” と書くこともある。

<sup>3</sup> 高等学校の教科書では, このことを  $Y \subseteq X$  と書くことが多いが, それ以外の業界では  $Y \subset X$  と書く  
のが多数派のようである。ここでの用法では  $X \subset X$  は正しい。

である<sup>4</sup>。

実数全体の集合  $\mathbb{R}$  の部分集合, すなわち実数の集合で, 数直線上のひと  
続きの部分を表しているものを区間 an interval という。区間には次のような  
ものがある:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}, & [a, a] &= \{a\}. \end{aligned}$$

ただし  $a, b$  は  $a < b$  を満たす実数である。とくに  $(a, b)$  を开区間 an open  
interval,  $[a, b]$  を閉区間 a closed interval という<sup>5 6</sup>。

### 1 変数関数の例

例 1.1. 実数  $x$  に対して実数  $x^2$  を対応させる対応の規則にいま  $f$  という名  
前をつけると, “ $f$  は定義域を  $\mathbb{R}$ , 値域を  $\mathbb{R}$  とする関数である” と考えるこ  
とができる。引用符で囲んだ部分のことを

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

と書く。また, “ $f$  は  $x$  を  $x^2$  に対応させる” というこを

$$f: x \longmapsto x^2, \quad f(x) = x^2$$

と書く。この 2 つの矢印の使い分けは, 数学の業界ではほぼ標準的である。

この関数  $f$  によって  $*$  に対応する値(数)が  $f(*)$  である:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(a) = a^2, \quad f(s) = s^2, \quad f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2.$$

<sup>4</sup> 記号 “ $\Leftrightarrow$ ” は “であるための必要十分条件は” と読む。

<sup>5</sup> 开区間の括弧は他の記号と紛らわしいかもしれない。それを避けるために  $(a, b)$  のことを  $]a, b[$  などと  
書く場合もある。しかし, 文脈で意味が確定するのでここでは丸括弧を使うことにする。

<sup>6</sup> 無限大  $\pm\infty$  は実数ではないので, たとえば  $(0, +\infty]$  という表記はない。

関数と関数の値の違いに気をつけよう。

ここで  $x$  が実数全体を動くとき、その値  $f(x)$  は負でない実数全体を動く。したがって  $f$  の像は  $[0, +\infty)$  となる<sup>7</sup>。

例 1.2. • 実数  $x$  に対して「平方して  $x$  になる実数」を対応させることを考える。実数  $-1$  に対して平方して  $-1$  になる実数は存在しないから、この対応は関数とみなすことはできない。

- 負でない実数<sup>8</sup>  $x$  に対して「平方して  $x$  になる実数」を対応させることを考える。実数  $4$  に対して平方して  $4$  になる実数は  $+2$  と  $-2$  のふたつがあるから、この対応は関数とみなすことはできない。
- 負でない実数全体の集合  $[0, +\infty)$  の各要素  $x$  に対して、「平方して  $x$  になる負でない実数」はただひとつ存在する。これを  $\sqrt{x}$  と書くことにすれば、 $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$  は  $[0, +\infty)$  を定義域にもつ関数である。

この授業で扱う 1 変数関数は、主に定義域が  $\mathbb{R}$  の区間、あるいはそれらの有限個の合併集合であるようなものである。

例 1.3. (1) 开区間  $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  の要素  $x$  に対して  $x$  の正接  $\tan x$  を対応させる規則  $f_1$  は、定義域を  $I$ 、値域を  $\mathbb{R}$  とする関数で、 $f_1$  の像は  $\mathbb{R}$  である。

(2) 0 でない実数  $x$  に対して  $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$  を対応させる規則  $f_2$  は

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

を定義域とする関数で<sup>9</sup>、その像は  $(0, +\infty)$  である。

関数は一本の式で表されるとは限らないし、数式で表されている必要もない。

例 1.4. (1) 実数  $x$  に対して、実数  $f_3(x)$  を

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

<sup>7</sup>ここで“像”のことを“値域”という場合もあるがこの講義では例 1.1 のように“像”と“値域”を使い分ける。

<sup>8</sup>すなわち  $x \geq 0$  を満たす  $x$  (a nonnegative real number)。“正の実数 a positive real number”は  $x > 0$  を満たす  $x$ 。

<sup>9</sup>記号“ $\cup$ ”は合併集合を表す。

と定めると  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  である。

(2) 実数  $x$  に対して、実数  $f_4(x)$  を

$$f_4(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + 2x & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると  $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  である。

(3) 実数  $x$  に対して、実数  $f_5(x)$  を

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数 a rational number のとき}) \\ 0 & (x \text{ が無理数 an irrational number のとき}) \end{cases}$$

と定めると  $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  である。

## 1.2 多変数関数

記号 正の整数  $n$  に対して、 $n$  個の実数の組全体の集合を  $\mathbb{R}^n$  と書く：

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

たとえば  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid x, y \text{ は実数}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \text{ は実数}\}$$

である。とくに  $\mathbb{R}$  は数直線、 $\mathbb{R}^2$  は座標平面、 $\mathbb{R}^3$  は座標空間とみなすこともできる。集合  $\mathbb{R}^n$  の要素のことを  $\mathbb{R}^n$  の点 a point と呼んだりする。

多変数関数 集合  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $D$  上の各点  $(x_1, \dots, x_n)$  に対して実数  $f(x_1, \dots, x_n)$  を対応させる規則  $f$  を  $D$  上で定義された ( $n$  変数) 関数、 $D$  を  $f$  の定義域という<sup>10</sup>。とくに  $n \geq 2$  の場合を多変数関数 といい、1 変数

<sup>10</sup>この授業では  $D$  としてあまり変な部分集合は考えない。 $D$  を  $\mathbb{R}^n$  の“領域”(ちゃんとした定義のある言葉である)とするのが妥当だが、その定義を述べるにはすこし手間がかかるので、いまはあまり気にしないことにする。第 3 節、およびテキスト 7 ページ、脚注 4 参照。

関数と区別する．第 1.1 節と同様に，“ $f$  は  $D \subset \mathbb{R}^n$  上で定義された関数である”ということをする

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

と書く．

例 1.5. 点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  に対して  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  とおくと  $f$  は  $\mathbb{R}^2$  上で定義された関数である<sup>11</sup> :  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  . ここで与えた対応の規則は

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

と書ける．とくに

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 0) = 1, \quad f(-1, -1) = \sqrt{2}$$

である．

例 1.6. 東経  $x$  度，北緯  $y$  度の地点の標高を  $f(x, y)$ m とすると， $f(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の 2 変数関数である（定義域は適当に考えよう）．たとえば

$$f(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$$

である．

例 1.7. いまこの瞬間の，東経  $x$  度，北緯  $y$  度の地点の地表における気圧を  $f(x, y)$ hPa とすれば， $f(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の 2 変数関数である．

グラフと等高線 1 変数関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  のグラフ the graph とは， $\mathbb{R}^2$  の部分集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

のことである．関数  $f$  が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標平面  $\mathbb{R}^2$  の曲線になる．

<sup>11</sup> 2 変数関数の場合， $\mathbb{R}^2$  の点を  $(x_1, x_2)$  と書くかわりに  $(x, y)$  と書くことがある．このとき “ $f(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の 2 変数関数である” ということもある．この講義では，簡単のため，主に 2 変数関数を扱うが，ほとんどの性質は一般の多変数関数に容易に拡張できる．

同様に 2 変数関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}^2$ ) に対して， $\mathbb{R}^3$  の部分集合

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

を  $f$  のグラフという．関数  $f$  が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標空間  $\mathbb{R}^3$  の曲面になる．

一方，2 変数関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  と定数  $c$  に対して，集合

$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

を，関数  $f$  の高さ  $c$  の等高線 the contour, the level set という．関数  $f$  が “性質がよい” もので， $c$  が “適切な” 値であれば，等高線は座標平面のなめらかな曲線になる．これについては第 7 節で言及する．

2 変数関数のグラフや等高線は関数の変化の様子を表しているといつてよい．

一般に  $n$  変数関数  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  と定数  $c$  に対して

$$\begin{aligned} & \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ & \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\} \subset D \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

をそれぞれ  $f$  のグラフ，値  $c$  の等高面またはレベル集合という．

スカラ場 例 1.6, 1.7 のように，関数  $f$  が「座標平面  $\mathbb{R}^2$  の各点に対して実数が対応している」とみなせるとき， $f$  を  $\mathbb{R}^2$  上のスカラ場 a scalar field<sup>12</sup> または平面のスカラ場という．同様に，3 変数関数が，座標空間の各点にたいして実数を対応させているとみなせるとき，空間のスカラ場という．

<sup>12</sup> 「スカラ場」と書くこともある．

## 問題 1

- 1-1 例 1.3, 1.4 の 1 変数関数のグラフを描きなさい。
- 1-2 身の回りの現象の中で, 2 変数関数, 3 変数関数... で表されるものの具体例を挙げなさい。
- 1-3 身の回りで, 平面のスカラー場, 空間のスカラー場とみなせる量の具体例を挙げなさい
- 1-4 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

に対して, 次の値を求めなさい:

- $f(0, 0), f(1, 1), f(1, 2), f(1, 3).$
  - $f(2, 4), f(3, 6), f(4, 8).$
  - $f(a, ma)$  ( $m$  は定数,  $a$  は 0 でない定数).
- 1-5 例 1.5 の関数  $f$  のグラフを描きなさい。また, 高さ 1, 2, 3... の等高線を描きなさい。
- 1-6 関数  $f(x, y) = x^2 - y^2$  のいろいろな高さの等高線を描きなさい。また, この関数のグラフを描きなさい。
- 1-7 例 1.6, 1.7 の関数  $f$  の等高線は何か。また, 例 1.6 の関数  $f$  のグラフは何か。
- 1-8 問題 1-4 の関数  $f$  の等高線を描きなさい。
- 1-9 次のような意見に対して, 有効な反論をなるべくたくさん挙げなさい:  
3 変数関数, 4 変数関数... のグラフは描くことができない。したがって, このような関数を考えることに実用的な意味はない。
- 1-10 例 1.2 に関して,  
負でない実数  $x$  に対して, 平方して  $x$  となる負でない実数がただひとつ存在する。  
という事実はどのようにして証明すればよいか<sup>13</sup>。

---

<sup>13</sup>むしろ後期のテーマ。

## 2 偏微分

### 2.1 1 変数関数の微分 (復習)

区間  $I \subset \mathbb{R}$  上で定義された 1 変数関数  $f$  と  $a \in I$  に対して極限值

$$(2.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき,  $f$  は  $a$  で微分可能 differentiable であるという. このとき, 極限值 (2.1) を  $f$  の  $a$  における微分係数 the differential coefficient と呼び,  $f'(a)$  で表す. 定義域  $I$  上のすべての点で  $f$  が微分可能ならば, 新しい関数

$$f': I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

が定まる. これを  $f$  の導関数 the derivative とよぶ.

例 2.1. •  $f(x) = |x|$  で与えられる関数  $f$  は  $x = 0$  で微分可能でない.

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で与えられる関数  $f$  は  $x = 0$  で微分可能でない.  $f$  のグラフは滑らかな曲線であることに注意しよう.
- 正の実数  $\alpha$  に対して

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる関数  $f$  は  $\alpha > 1$  のとき 0 で (したがって  $\mathbb{R}$  で) 微分可能で,

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる.

微分可能な関数  $f$  を  $y = f(x)$  と書き表したとき,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

と書くことがある. この記号は, 合成関数・逆関数の微分公式を覚えるのに便利であった.

さらに  $f'(x)$  が微分可能なとき,  $f'(x)$  の導関数  $f''(x)$  を  $f$  の 2 次導関数 (2 階微分) the second derivative,  $f''(x)$  の導関数を 3 次導関数 the third derivative ... と呼ぶ. 一般に  $f$  ( $y = f(x)$ ) の  $n$  次導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

と書く. ここで  $f^{(0)}(x) = f(x)$  と約束しておく.

### 2.2 偏微分係数と偏導関数

領域<sup>1</sup>  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された 2 変数関数

$$f: D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

を考える. 点  $(a, b) \in D$  において, 極限值

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \end{aligned}$$

がともに存在するとき,  $f$  は  $(a, b)$  で偏微分可能 partially differentiable であるといって,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \left( \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

を“ $f$  の  $(a, b)$  における  $x$  に関する ( $y$  に関する) 偏微分係数”という.

さらに  $f$  が  $D$  の各点で偏微分可能なとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x}: D \ni (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R}$$

<sup>1</sup>用語“領域”の意味は次回第 3 節で述べる.

は  $D$  で定義された 2 変数関数を与える . これを  $f$  の  $x$  に関する偏導関数 the partial derivative with respect to  $x$  という . 同様に  $f$  の  $y$  に関する偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial y}$  も定義される .

注意 2.2 (記号の注意). • 偏導関数の記号  $\frac{\partial f}{\partial x}$  の “ $\partial$ ” はディーまたはラウンド・ディーと読む . これを  $d$  と書くことはない .

- 2 行にまたがるのがいやな場合は

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

という記号を使う .

偏導関数の計算 関数  $f$  (関数  $f(x, y)$  ということがある) の  $x$  に関する偏導関数は ,  $y$  の値を止めたまま  $x$  を変化させて得られる 1 変数関数の導関数とみなすことができる . したがって  $f(x, y)$  が  $x, y$  の式で与えられているとき ,  $f_x$  は  $f(x, y)$  の  $y$  を定数として  $x$  に関して微分したもので与えられる .

2 階の偏導関数 関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  がそれぞれ偏微分可能ならば 4 つの 2 変数関数

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, & f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

を考慮することができる . これらを  $f$  の 2 次偏導関数 the second partial derivatives という .

例 2.3. 2 変数関数  $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^2$  に対して

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 6xy, \quad f_y(x, y) = 3x^2 + 2y.$$

さらにこれを微分して 2 次偏導関数

$$f_{xx} = 6x + 6y, \quad f_{xy} = 6x, \quad f_{yx} = 6x, \quad f_{yy} = 2$$

を得る .

この例では  $f_{xy}$  ( $x$  で偏微分して , そのあと  $y$  で偏微分したもの) と  $f_{yx}$  ( $y$  で偏微分して , そのあと  $x$  で偏微分したもの) が一致する . これは偶然ではなく

よく使われる状況では  $f_{xy}$  と  $f_{yx}$  は一致する .

これを偏微分の順序交換定理という . この定理を正確に述べるためには , 2 変数関数の連続性の概念が必要なので , それを次回 (第 3 節) で扱おう .

問題 2-8 は  $f_{xy}$  と  $f_{yx}$  が一致しない例 (病的な例) である .

高階の偏導関数 2 次偏導関数がさらに偏微分可能ならば , 3 次偏導関数を考えることができる . 一般に 2 変数関数  $f(f(x, y))$  の 3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, \dots$$

などたくさんあるが , 性質のよい関数ならば , たとえば上の 3 つは一致する (偏微分の順序交換定理) . このような場合 , 3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

の 4 通りとなる . さらに高次の偏導関数も考えることができる .

## 問題 2

2-1 例 2.1 を確かめなさい .

2-2 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

の偏導関数をすべて求めなさい .

2-3 変数  $(t, x)$  の 2 変数関数  $u(t, x)$  に関する関係式

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を熱方程式 the heat equation という (このいわれについて調べなさい) . 関数

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

は方程式 (\*) を満足することを示しなさい .

2-4 変数  $(t, x)$  の 2 変数関数  $u(t, x)$  に関する関係式

$$(**) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を波動方程式 the wave equation という (このいわれについて調べなさい) . 関数

$$u(t, x) = a \sin(t + x) + b \sin(t - x) \quad (a, b \text{ は定数})$$

は方程式 (\*\*) を満足することを示しなさい .

2-5 2 変数関数  $f(x, y)$  が関係式

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

を満たしているとき,  $f$  は調和関数 a harmonic function であるという (このいわれについて調べなさい) . 次の関数は調和関数であることを確かめなさい:

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

また,  $x, y$  の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい .

2-6 3 変数関数  $f(x, y, z)$  が関係式

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

を満たしているとき,  $f$  を (3 変数の) 調和関数という . 1 変数関数  $F(t)$  を用いて

$$f(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

という形でかけるような 3 変数関数  $f$  が調和関数となるような  $F$  を求めなさい .

2-7 2 変数関数  $f(x, y)$  に関する関係式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = 0$$

を満たすとき, 関数  $f$  のグラフで与えられる曲面を極小曲面 a minimal surface という (このいわれについて調べなさい) . 次の関数 (定義域はどこと考えるのがよいか) のグラフは極小曲面であることを確かめなさい:

$$f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}), \quad g(x, y) = \log \frac{\cos x}{\cos y}.$$

2-8 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は 2 階偏微分可能であることを示し, 2 次偏導関数を求めなさい . (テキスト 21 ページの問い 7 参照) .

2-9 一般に  $n$  変数関数の 2 次導関数は何通りあるか . 偏微分の順序交換ができる場合と, 順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい .

2-10 一般に  $n$  変数関数の  $m$  次導関数は何通りあるか . 偏微分の順序交換ができる場合と, 順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい .

### 3 連続性・微分可能性

#### 3.1 1変数関数の連続性と微分可能性 (復習)

連続性と微分可能性 区間  $I \subset \mathbb{R}$  で定義された1変数関数  $f$  が  $a \in I$  で連続 continuous であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである。

例 3.1. ● 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は0で連続でない。実際  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$  であるが  $f(0) = 0$  である。

● 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は0で連続でない。実際

$$x_n = \left[ \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^{-1}, \quad y_n = \left[ \left( 2n + \frac{3}{2} \right) \pi \right]^{-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  を定義すると  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  であるが,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1$  となるので  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  は存在しない。

定理 3.2. 一変数関数  $f$  が  $a$  で微分可能ならば  $a$  で連続である。

証明. 極限の性質から

$$\begin{aligned} \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) - f(a) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right) = \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} h \right) \\ &= f'(a) \times 0 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

□

$C^r$ -級関数 区間  $I$  で定義された1変数関数  $f$  に対して

- $f$  が  $I$  で連続である, とは  $I$  の各点で連続なことである。このとき  $f$  は  $I$  で  $C^0$ -級である of class  $C^0$ , という。
- $f$  が  $I$  で微分可能であるとは  $I$  の各点で微分可能なことである。このとき定理 3.2 より  $f$  は自動的に  $I$  で連続になる。また  $f$  の導関数  $f'$  は, 区間  $I$  で定義された関数となる ( $f'$  が連続であるとは限らない)。
- $f$  が  $I$  で  $C^1$ -級である, とは,  $f$  が  $I$  で微分可能で, かつ導関数  $f'$  が  $I$  で連続であること, と定義する。
- 正の整数  $r$  に対して  $f$  が  $I$  で  $C^r$ -級であるとは,  $f$  の  $r$  次導関数  $f^{(r)}$  が存在して  $I$  で連続となることと定義する。
- 関数  $f$  が全ての負でない整数  $r$  に対して  $C^r$ -級であるとき,  $f$  は  $C^\infty$ -級であるという。

例 3.3. ● 正の整数  $m$  と実数  $a_0, \dots, a_m$  に対して

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_1 x + a_0$$

で与えられる関数を  $x$  の多項式 a polynomial という。とくに  $a_k = 0$  ( $k \geq 1$ ) であるような多項式で与えられる関数  $f(x) = a_0$  を定数関数 a constant function という。多項式は  $C^\infty$ -級である。

● 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2} x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる関数  $f$  は微分可能であるが  $C^1$ -級ではない。実際,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$



となる (例 2.1 参照) が,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  は存在しない (例 3.1 参照) ので  $f'$  は 0 で連続でない.

平均値の定理 多変数関数の微分を議論するのに必要なので, 平均値の定理を思い出しておこう. 証明は後期の微分積分学第二で与える:

定理 3.4. 関数  $f$  が区間  $I$  で微分可能であるとき, 点  $a \in I$  と  $a+h \in I$  となるような  $h$  に対して,

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \quad (0 < \theta < 1)$$

を満たす  $\theta$  が存在する<sup>1</sup>.

例 3.5. 区間  $I$  で定義された微分可能な関数  $f$  が  $I$  の各点で  $f'(x) = 0$  を満たしているならば  $f$  は定数関数である. 実際,  $I$  の点  $a$  をひとつ固定して  $c = f(a)$  とおく.  $I$  の  $a$  と異なる点  $x$  をとり,  $x - a = h (\neq 0)$  とおくと,

$$f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \quad (0 < \theta < 1)$$

を満たす  $\theta$  が存在する. ここで  $a+\theta h$  は  $a$  と  $x$  の間の点だから,  $I$  の点である. したがって, 仮定より右辺  $f'(a+\theta h) = 0$ . このことから  $f(x) = f(a) = c$  が成り立つ. ここで  $x$  は任意だったので結論が得られた.

### 3.2 2変数関数の極限・連続性・微分可能性

領域 座標平面  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $D$  が領域 a domain であるとは, それが“ひと続きで端をもたない”ことである<sup>2</sup>. たとえば  $\mathbb{R}^2$  全体, 開円板や開長方形

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < d\}$$

は領域である. ただし  $r, a, b, c, d$  は実数の定数で,  $r > 0, a < b, c < d$  を満たすものとする.

以下, 2変数関数  $f$  は  $\mathbb{R}^2$  の領域  $D$  を定義域に持つものとする.

<sup>1</sup>関数  $f$  を与えたとき,  $\theta$  は  $a$  と  $h$  に依存して定まる. 与えられた  $a, h$  に対して具体的に  $\theta$  の値を求めることはそれほど重要ではない.

<sup>2</sup>このことのもう少し正確な意味はこの節末で述べる

極限 2変数関数  $f$  に対して

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

である, とは  $(x, y)$  がどのような経路で  $(a, b)$  に近づいても  $f(x, y)$  の値が  $A$  に近づくことである<sup>3</sup>.

注意 3.6. (i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k)$ .

(ii)  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = A$  とは,  $\sqrt{h^2 + k^2}$  が 0 に近づくときに  $f(a+h, b+k)$  が  $A$  に近づくことである.

(iii)  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = A$  とは, 正の数  $r$  が 0 に近づくときに  $f(a+r \cos \theta, b+r \sin \theta)$  が  $\theta$  によらずに  $A$  に近づくことである.

(iv) 二つの 2変数関数  $\alpha(h, k), \beta(h, k)$  が

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \alpha(h, k) = 0, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \beta(h, k) = 0$$

を満たしているとする. さらに 2変数関数  $f$  が  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$  を満たしているならば,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a + \alpha(h, k), b + \beta(h, k)) = A.$$

(v)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$  ならば, 0 に収束する 2 つの数列  $\{h_n\}, \{k_n\}$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a+h_n, b+k_n) = A$ .

(vi) “ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$ ” でないための必要十分条件は, 0 に収束する 2 つの数列  $\{h_n\}, \{k_n\}$  をうまくとると  $f(a+h_n, b+k_n)$  が  $A$  に収束しないようにできることである.

例 3.7. • 関数  $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$  を考える.  $h_n = \frac{1}{n}, k_n = \frac{1}{n}$  とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k_n) = 1$  であるが,  $h_n = \frac{1}{n}, k_n = -\frac{1}{n}$  とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k_n) = -1$  である. したがって, 極限值  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  は存在しない. 一方,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0.$$

<sup>3</sup>このことのもう少しきちんとした定義は後期に紹介する.

- $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$  は  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  としたときの極限值を持たない。一方,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

- $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$  は  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき 0 に近づく。実際,  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とおくと

$$(*) \quad f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{4} r^2 \sin 4\theta$$

だが,  $|\sin 4\theta| \leq 1$  だから

$$\left| \frac{r^2}{4} \sin 4\theta \right| \leq \frac{r^2}{4} \quad \text{すなわち} \quad -\frac{r^2}{4} \leq \frac{r^2}{4} \sin 4\theta \leq \frac{r^2}{4}$$

なので  $(*)$  の右辺は  $r \rightarrow 0$  とすると 0 に近づく。

### 連続性

定義 3.8. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された 2 変数関数  $f$  が点  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  で連続であるとは,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つことである。

例 3.9. (1)  $\mathbb{R}^2$  で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は  $(0, 0)$  で連続でないが, 偏微分可能で  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  である。

(2)  $\mathbb{R}^2$  で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は  $(0, 0)$  で連続である。

一般に, 多項式であらわされる関数は連続, 有理式, すなわち多項式の商で表される関数は分母が 0 とならない点で連続である。

### 微分可能性

定義 3.10. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された関数  $f(x, y)$  が  $(a, b) \in D$  で微分可能であるとは, うまく定数  $A, B$  を選び,  $(a + h, b + k) \in D$  となるような  $(h, k)$  に対して

$$(*) \quad f(a + h, b + k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくとき

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

となるようにできることである。

命題 3.11. 関数  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で微分可能ならば,  $f$  は  $(a, b)$  で偏微分可能であって,  $(*)$  の定数  $A, B$  は  $A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$  でなければならない。

証明. 式  $(*)$  の  $k = 0$  として

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{Ah + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2}}{h} = A + \varepsilon(h, 0)\frac{|h|}{h}$$

だが,  $-\varepsilon(h, 0) \leq \varepsilon(h, 0)\frac{|h|}{h} \leq \varepsilon(h, 0)$ , かつ  $h \rightarrow 0$  とすると  $\varepsilon(h, 0) \rightarrow 0$  だから

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b).$$

一方  $h = 0$  とすることで  $B = f_y(a, b)$  も得られる。□

命題 3.12. 関数  $f$  が  $(a, b)$  で微分可能ならば  $(a, b)$  で連続である .

証明 . 式 (\*) の両辺で  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  とすればよい . □

注意 3.13. 命題 3.11 の逆は成立しない . 実際 , 例 3.9 (1) の関数  $f$  は  $(0, 0)$  で偏微分可能であるが連続でない . したがって , 命題 3.12 の対偶から微分可能でない .

#### 微分可能性の十分条件

命題 3.14. 領域  $D$  で定義された二変数関数  $f$  が  $D$  の各点で偏微分可能 , かつ偏導関数  $f_x, f_y$  が  $D$  で連続ならば  $f$  は  $D$  の各点で微分可能である .

証明 . 点  $(a, b) \in D$  で微分可能であることを示そう . (\*) の  $A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$  として  $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0 ((h, k) \rightarrow (0, 0))$  を示せばよい :

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおく . いま ,  $k$  を一つ固定して

$$F(h) := f(a+h, b+k) - f(a, b+k)$$

とおくと<sup>4</sup>  $f$  の偏微分可能性から  $F$  は  $h$  の微分可能な関数で  $F'(h) = f_x(a+h, b+k)$  ,  $F(0) = 0$  が成り立つ . そこで  $F$  に平均値の定理 3.4 を適用すると

$$F(h) = F(h) - F(0) = F'(0 + \theta h)h = F'(\theta h)h = f_x(a + \theta h, b+k)h \\ (0 < \theta = \theta(h, k) < 1)$$

を満たす  $\theta$  が存在する ( $\theta = \theta(h, k)$  は  $h$  と  $k$  に依存して決まる) . 同様に  $G(k) = f(a, b+k) - f(a, b)$  とおくと ,  $k$  を定めるごとに

$$G(k) = G'(0 + \delta k)k = f_y(a, b + \delta k)k \quad (0 < \delta = \delta(k) < 1)$$

を満たす  $\delta = \delta(k)$  をとることができる . したがって

$$\varepsilon(h, k) = \frac{F(h) + G(k) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ = \frac{(f_x(a + \theta h, b+k) - f_x(a, b))h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{(f_y(a, b + \delta k) - f_y(a, b))k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

となるが ,  $0 < \theta < 1, 0 < \delta < 1$  だから  $\theta h \rightarrow 0, \delta k \rightarrow 0 ((h, k) \rightarrow (0, 0))$  が成り立つことと ,  $|h/\sqrt{h^2 + k^2}| \leq 1, |k/\sqrt{h^2 + k^2}| \leq 1$  であることから , 右辺は  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  のときに 0 に近づく . □

<sup>4</sup>記号 “:=” は (ここでは) 左辺を右辺によって定義するという意味を表す .

注意 3.15. 命題 3.14 の逆は成立しない . 実際 ,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は  $(0, 0)$  で微分可能であるが  $f_x, f_y$  は原点で連続でない .

$C^r$ -級関数 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された二変数関数  $f$  に対して

- $f$  が  $D$  で連続である , とは  $D$  の各点で連続なことである . このとき  $f$  は  $D$  で  $C^0$ -級である , という .
- $f$  が  $D$  で微分可能であるとは  $D$  の各点で微分可能なことである . このとき  $f$  は自動的に  $D$  で連続 , また  $D$  の各点で偏微分可能になる . また  $f$  の偏導関数  $f_x, f_y$  は ,  $D$  で定義された関数となる
- $f$  が  $D$  で  $C^1$ -級であるとは  $D$  の各点で偏微分可能で ,  $f_x, f_y$  が  $D$  で連続となることである .
- $f$  が  $D$  で  $C^2$ -級である , とは ,  $f$  の 2 次偏導関数  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$  が  $D$  上で定義されていて , さらにそれらがすべて  $D$  で連続であることと定義する .

#### 偏微分の順序交換定理

定理 3.16 (偏微分の順序交換) . 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された二変数関数  $f$  の 2 つの 2 次偏導関数  $f_{xy}, f_{yx}$  が存在して , とともに連続であるとき ,  $f_{xy} = f_{yx}$  が成立する .

証明 . 点  $(a, b) \in D$  を固定して  $f_{xy}(a, b)$  と  $f_{yx}(a, b)$  が等しいことを示す . いま

$$V = V(h, k) := \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a, b)}{hk}$$

とおくと

$$V = \frac{1}{k} \frac{F(h) - F(0)}{h} \quad (F(t) := f(a+t, b+k) - f(a+t, b))$$

であるが,  $F'(t) = f_x(a+t, b+k) - f_x(a+t, b)$  であることに注意して平均値の定理 3.4 を適用すれば,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{k} F'(\theta_1 h) = \frac{1}{k} (f_x(a + \theta_1 h, b+k) - f_x(a + \theta_1 h, b)) \\ &= \frac{1}{k} (F_1(k) - F_1(0)) \quad (F_1(t) := f_x(a + \theta_1 h, b+t)) \end{aligned}$$

となる  $\theta_1 \in (0, 1)$  が存在する. さらに  $F_1'(t) = f_{xy}(a + \theta_1 h, b+t)$  に注意すれば, 平均値の定理から次を満たす  $\theta_1, \theta_2$  が存在することがわかる:

$$(*) \quad V = f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) \quad (\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)).$$

同様に  $V = (G(k) - G(0))/(hk)$  ( $G(t) := f(a+h, b+t) - f(a, b+t)$ ) とすると

$$(**) \quad V = f_{yx}(a + \varphi_1 h, b + \varphi_2 k) \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in (0, 1))$$

となる  $\varphi_1, \varphi_2$  が存在する.  $f_{xy}, f_{yx}$  の連続性から  $(*)$ ,  $(**)$  の  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  とする極限をとれば,  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$  が成り立つことがわかる.  $\square$

とくに  $f$  が  $C^2$ -級であれば  $f_{xy} = f_{yx}$  である.

#### 領域について

第 3.2 節冒頭で“領域”のいい加減な定義を与えた. 整合性のためにここで領域の定義を与えるが, 当面はあまり気にしないでよい.

定義. 座標平面  $\mathbb{R}^2$  の連続な道 a continuous path とは, 閉区間  $I = [a, b]$  で定義されたふたつの連続関数  $x, y$  の組で与えられる対応<sup>5</sup>

$$\gamma = (x, y): I \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

である. このとき  $\mathbb{R}^2$  の点  $\gamma(a), \gamma(b)$  をそれぞれ道  $\gamma$  の始点, 終点とよぶ.

定義. 座標平面  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $D$  が連結 connected であるとは,  $D$  の各点  $P, Q$  に対して  $P$  を始点,  $Q$  を終点とする連続な道  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  で各  $\gamma(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) が  $D$  の点となるものが存在することをである. (この概念は正確には“弧状連結性” pathwise connectedness という).

定義. 座標平面  $\mathbb{R}^2$  の点  $P = (a, b)$  と正の実数  $\varepsilon$  に対して

$$U_\varepsilon(P) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

で与えられる  $\mathbb{R}^2$  の部分集合を“点  $P$  を中心とした半径  $\varepsilon$  の円板” the disc centered at  $P$  of radius  $\varepsilon$ , あるいは短く“ $P$  を中心とする  $\varepsilon$ -円板” the  $\varepsilon$ -disc centered at  $P$  という.

<sup>5</sup>写像 a mapping という. いままで考えてきた関数は, 実数を値にとるが, ここでの  $\gamma$  は座標平面  $\mathbb{R}^2$  の点を値にとる. 一般に“対応の規則”を写像というが, 値域が数の集合であるときをとくに関数とよぶことが多い.

定義. 座標平面  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $D$  が開集合 an open set であるとは  $D$  の各点  $P$  に対して  $U_\varepsilon(P) \subset D$  となるような正の数  $\varepsilon$  をとることができることである.

ここでは証明を与えないが, 次の事実は重要である:

事実. 座標平面  $\mathbb{R}^2$  上で定義された連続関数  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

は開集合である.

これらの用語を用いて, “領域”という語に定義を与える:

定義. 座標平面  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $D$  が領域 a domain であるとは,  $D$  が連結かつ開集合となることである.

### 問題 3

3-1 実数  $\alpha$  に対して, 次の条件を満たす整数  $k$  を求めなさい: 関数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は  $\mathbb{R}$  で  $C^k$  級であるが  $C^{k+1}$ -級でない.

3-2 平均値の定理 3.4 の絵を  $h > 0, h < 0$  の場合にそれぞれ描きなさい.

3-3 数直線上の区間  $I \subset \mathbb{R}$  で定義された微分可能な関数  $f$  の導関数  $f'$  が常に正の値をとるならば,  $f$  は  $I$  上で単調増加である. このことを, 平均値の定理を用いて証明しなさい. ただし, 1 変数関数  $f$  が区間  $I$  で単調増加であるとは“ $I$  上の 2 点  $x_1, x_2$  が  $x_1 < x_2$  を満たすならば  $f(x_1) < f(x_2)$  が成り立つ”ことである.

3-4 2 変数関数が連続であること, 偏微分可能であること, 微分可能であること,  $C^1$ -級であることの間を整理しなさい.

例: 微分可能  $\Rightarrow$  連続; 連続  $\not\Rightarrow$  微分可能. 実際  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  は  $(0, 0)$  で連続だが微分可能でない.

3-5 2 変数関数が  $C^r$ -級であることを定義しなさい. また  $C^r$ -級の関数は, 任意の  $r$  以下の任意の負でない整数  $k$  に対して  $C^k$ -級であることを確かめなさい.

3-6 2 変数関数が  $C^\infty$ -級であることを定義しなさい.

## 4 初等関数

三角関数の記号 高等学校で学んだ余弦 cosine, 正弦 sine, 正接 tangent の他に, 次の記号を用いることがある:

$$(4.1) \quad \cot x := \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x := \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x := \frac{1}{\sin x}.$$

これらをそれぞれ 余接 cotangent, 正割 secant, 余割 cosecant という<sup>1</sup> これらの記号は, たとえば

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

のように使う.

### 逆三角関数

定義 4.1. • 与えられた  $x$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) に対して  $x = \cos y$  ( $0 \leq y \leq \pi$ ) をみたく  $y$  を  $y = \cos^{-1} x$  と書く.

- 与えられた  $x$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) に対して  $x = \sin y$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ) をみたく  $y$  を  $y = \sin^{-1} x$  と書く.
- 与えられた実数  $x$  に対し  $x = \tan y$  ( $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ) をみたく  $y$  を  $y = \tan^{-1} x$  と書く.

これら  $\cos^{-1} x$ ,  $\sin^{-1} x$ ,  $\tan^{-1} x$  をそれぞれ逆余弦関数 arc cosine, 逆正弦関数 arc sine, 逆正接関数 arc tangent といい, これらをまとめて逆三角関数 inverse triangular functions とよぶ.

注意 4.2. • これらを arccos, arcsin, arctan と書くこともある.

- 逆三角関数の値の範囲を制限せずに, 例えば “ $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$  ( $n$  は整数)” のように厳密な意味では関数にならない “多価関数” とみなすこともある. このとき, 定義 4.1 の逆三角関数を “逆三角関数の主値” といい,  $\text{Cos}^{-1} x$ ,  $\text{Arccos} x$  などと書くこともある.

<sup>1</sup>2013 年 4 月 30 日 (自習用)

余割 cosecant は “cosec” と書くこともある.

合成関数の微分公式を用いれば, 次の逆三角関数の微分公式を得る:

$$(4.2) \quad \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

実際,  $y = \cos^{-1} x$  とすると  $x = \cos y$  であるから, 逆関数の微分公式から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{-1}{\sin y}.$$

ここで  $0 \leq y \leq \pi$  だから,  $\sin y \geq 0$  なので  $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$  なので第一式を得る. 第二式も同様にやればよい.

また,  $\tan^{-1} x$  の微分公式を得るには

$$\frac{d}{dy} \tan y = 1 + \tan^2 y$$

を用いればよい<sup>2</sup>.

ただし  $x = \pm 1$  で  $\cos^{-1} x$ ,  $\sin^{-1} x$  は微分可能でない. 逆余弦関数と逆正弦関数の導関数は符号が違うだけだが, これは, 恒等式

$$(4.3) \quad \cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

による.

実際,  $\alpha = \cos^{-1} x$ ,  $\beta = \sin^{-1} x$  とすれば,  $\sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}$  などに注意すれば

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 1.$$

一方  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  だから  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3\pi}{2}$ . したがって  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , すなわち (4.3) が得られた.

公式 (4.2) と  $\tan^{-1} 0 = \sin^{-1} 0 = 0$  から

$$(4.4) \quad \tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, \quad \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

が成り立つことがわかる.

<sup>2</sup>正接関数  $\tan x$  の微分公式は  $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$  と覚えるのがよい.  $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$  と覚えるよりも計算がやりやすいはず.

初等関数 多項式, 冪関数 ( $x^\alpha$  の形, 冪乗根を含む), 指数関数, 対数関数, 三角関数, 逆三角関数に加減乗除, 合成の操作を有限回施すことによって得られる関数を初等関数という. 初等関数はその定義域に含まれる開区間で  $C^\infty$ -級である.

微分公式から, 初等関数の導関数は初等関数であることがすぐにわかるが, 初等関数の原始関数は初等関数であるとは限らない. 原始関数が初等関数で表されるような積分計算の基本テクニックを演習問題に挙げておく.

### 双曲線関数

定義 4.3. 実数  $x$  に対して

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

をそれぞれ  $x$  の双曲的余弦 hyperbolic cosine, 双曲的正弦 hyperbolic sine, 双曲的正接 hyperbolic tangent とよび, これらを双曲線関数 hyperbolic functions という.

注意 4.4. 双曲的余弦  $\cosh t$  と, 角度  $ht$  の余弦  $\cos ht$  を混同しないように. 印刷物であれば, 立体と斜体のフォントの使い分けで 明確に区別できる.

双曲線関数の性質:

- 恒等式  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  が成り立つ<sup>3</sup>. とくに  $(x(t), y(t)) = (\cosh t, \sinh t)$  は  $(x, y)$  平面の双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  の右半分のパラメータ表示となる. これが双曲線関数の名前の由来である. 一方, 三角関数は円のパラメータ表示を与えることから “円関数” circular functions と呼ばれることがある.

- 加法定理

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

が成り立つ.

- 微分公式

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \tanh x = 1 - \tanh^2 x$$

が成り立つ.

- 関数  $u(t) = A \cosh t + B \sinh t$  は微分方程式  $u'' = u$  の, 初期条件  $u(0) = A, u'(0) = B$  を満たす解である (微分方程式を  $u'' = -u$  とすると,  $u = A \cos t + B \sin t$  が解になる.)

余談: 円周率の近似

実数  $t$  に対して, 初項 1, 公比  $-t^2$  の等比級数の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^N t^{2N} = \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + t^2} + \frac{(-1)^N t^{2N+2}}{1 + t^2}$$

を  $t = 0$  から  $x$  まで定積分すると,

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x)$$

$$\left( R_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{2N+2}}{1 + t^2} dt \right)$$

を得る. ここで

$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1 + t^2} dt \leq \int_0^{|x|} t^{2N+2} dt = \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1 + t^2} dt \geq \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1 + x^2} dt = \frac{1}{2N+3} \frac{|x|^{2N+3}}{1 + x^2}$$

<sup>3</sup>三角関数と同様に  $\cosh^2 x$  は  $(\cosh x)^2$  を表す.

なので,

$$(4.5) \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+1} x^{2N+1} + R_N(x) = \left( \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right) + R_N(x)$$

$$\frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)(1+x^2)} \leq |R_N(x)| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

が成り立つ. これは後期に扱うテイラーの定理の特別な場合である. とくに  $|x| \leq 1$  とすると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(x) = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1 \text{ のとき})$$

が成り立つので, 逆正接関数の級数表示

$$(4.6) \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

が得られた.

とくに (4.6) で  $x = 1$  とすると, ライプニッツの式

$$(4.7) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

が得られる. この右辺を適当な項まで計算すれば, 円周率の近似値が得られる. 誤差の項を  $\tilde{R}_N$  とすると (4.5) の  $R_N(1)$  の形から

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+3} \right) + \tilde{R}_N, \quad \frac{2}{2N+3} \leq |\tilde{R}_N| \leq \frac{4}{2N+3}$$

が成り立つことがわかる. この式を用いて円周率を小数 100 位まで求めることを考えよう: 誤差  $|\tilde{R}_N|$  は  $10^{-100}$  を超えないようにするには  $N \geq 10^{100} - \frac{3}{2}$  が必要,  $N \geq 2 \times 10^{100} - \frac{3}{4}$  が十分である (!).

ここで, 次の等式 (マチンの公式) を思い出そう:

$$(4.8) \quad \frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}.$$

公式 (4.5) を用いると,  $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{239}$  として

$$\pi = 4 \left( \sum_{k=0}^M \frac{4(-1)^k \alpha^k}{2k+1} - \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j \beta^j}{2j+1} \right) + R_{M,N},$$

$$|R_{M,N}| \leq \frac{16\alpha^{2M+1}}{2M+1} + \frac{4\beta^{2N+1}}{2N+1}$$

となる. とくに  $R_{M,N}$  が  $10^{-100}$  を超えないためには  $M = 100, N = 20$  くらいあれば十分である. 公式 (4.7) を用いた計算 ( $10^{100}$  項くらい必要) と比較せよ.

## 問題 4

4-1 逆三角関数, 正割, 余割, 余接関数のグラフを描きなさい.

4-2 式 (4.2), (4.3) の証明をきちんと書きなさい.

4-3 双曲線関数について

- $\cosh x \geq 1, -1 < \tanh x < 1$  であることを確かめなさい.
- $\cosh x$  は偶関数,  $\sinh x, \tanh x$  は奇関数であることを確かめなさい.
- グラフ  $y = \cosh x, y = \sinh x, y = \tanh x$  を描きなさい.
- 三角関数に倣って, 双曲線関数の 2 倍角の公式, 3 倍角の公式, 半角の公式, 積和公式, 和積公式をつくりなさい.
- $t = \tanh \frac{u}{2}$  とおいたとき,  $\cosh u, \sinh u$  を  $t$  の有理式で表しなさい. このことを用いて, 双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  上に,  $x$  座標,  $y$  座標がともに有理数であるような点がたくさんあることを確かめなさい.
- $A, B$  を定数とすると,  $A \cos t + B \sin t$  は  $r \cos(t + \alpha), r \sin(t + \beta)$  の形に表すことができる (合成公式). これに倣って, 双曲線関数の合成公式をつくりなさい.
- $x \geq 1$  を満たす  $x$  に対して,  $x = \cosh y, y \geq 0$  を満たす  $y$  を  $y = \cosh^{-1} x$  と書くと

$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

となることを確かめなさい. 同様に  $\sinh^{-1} x, \tanh^{-1} x$  を定義し,

$$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

であることを確かめなさい.

- 4-4
- 等式  $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$  を示しなさい.
  - 上の式に (4.5) を適用して  $\pi$  の近似値を小数第 5 位まで求めなさい.
  - マチンの公式 (4.8) が成り立つことを確かめなさい.
- 4-5
- $\log x = (x)'$   $\log x$  であることを用いて  $\log x$  の原始関数を求めなさい.
  - $\cos^{-1} x, \sin^{-1} x, \tan^{-1} x$  の原始関数を求めなさい.
- 4-6 負でない整数  $n$  に対して  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$  とおく. とくに  $n \geq 2$  のとき  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  が成り立つことを示し,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} & (n = 2m), \\ \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} & (n = 2m+1) \end{cases}$$

であることを確かめなさい. ただし  $m$  は正の整数である. さらに  $\sin^n x$  の積分についても同様のことを行いなさい.

- 4-7  $\sqrt{1-x^2}$  の原始関数を次のようにして求めなさい .
- $x = \sin \theta$  と置換する .
  - $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  と置換する .
- 4-8  $f(x) = (x-1)(x-2)(x+4)^2$  とするとき ,  $1/f(x)$  の原始関数を求めなさい (部分分数分解) .
- 4-9 定数  $a, b$  に対して  $1/(x^2 - 2ax + b)$  の原始関数を次の場合に求めなさい .
- $a^2 - b = 0$  の場合, すなわち  $1/(x+a)^2$  の原始関数 .
  - $a^2 - b > 0$  の場合 (部分分数分解) .
  - $a^2 - b < 0$  の場合 :  $1/(1+u^2)$  の原始関数に帰着させる .
- 4-10  $1/\cos x (= \sec x)$  の原始関数を , 次の方法で求めなさい :
- $t = \tan \frac{x}{2}$  と置換する . 被積分関数は  $t$  の有理式なので , 部分分数分解を用いることができる .
  - $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$  とおいて  $u = \sin x$  と置換する .
  - $\frac{1}{\cos x} = \cosh u$  と置換する .
- 4-11  $\sqrt{1+x^2}$  の原始関数を次のようにして求めなさい :
- $(x)\sqrt{1+x^2}$  とみなして部分積分を行うことにより ,  $1/\sqrt{1+x^2}$  の積分に帰着する .
  - $x = \tan \theta$  と置換する .
  - $x = \sinh u$  と置換する .
- 4-12 次の関数の原始関数を求めなさい :

$$\frac{1}{x^4-1}, \quad \frac{1}{x^3-1}, \quad \frac{1}{x^4+1}.$$

- 4-13 地球 (半径  $R$  メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き , その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき , ゴムひもはどれくらい伸びるか .  $R$  を用いて表しなさい . さらに ,  $R$  の具体的な値 (1 メートルが定義されたときのいきさつからすぐわかる) を用いて , 伸びを実際に求めなさい : 関数電卓を用いるとどのような値になるか . その答えは何桁目まで正しいか . さらに , 手計算で値を求めるためにはどうしたらよいか .



## 5 全微分・方向微分

### 微分可能性の復習

定義 5.1. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された関数  $f(x, y)$  が  $(a, b) \in D$  で微分可能であるとは, うまく定数  $A, B$  を選び,  $(a+h, b+k) \in D$  となるような  $(h, k)$  に対して

$$(*) \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

となるようにできることである.

命題 5.2. 関数  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で微分可能ならば,  $f$  は  $(a, b)$  で偏微分可能であって,  $(*)$  の定数  $A, B$  は  $A = f_x(a, b)$ ,  $B = f_y(a, b)$  でなければならない.

以上から, 次のことがわかる:

定理 5.3. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された関数  $f(x, y)$  が  $(a, b) \in D$  で微分可能であるための必要十分条件は,  $f$  が  $(a, b)$  で偏微分可能で,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が成り立つことである.

全微分 関数  $f(x, y)$  が  $P = (a, b)$  で微分可能であるとき,

$$(df)_P = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

与えられる 2 次列ベクトル  $(df)_P$  を関数  $f$  の点  $P$  における全微分または微分という. さらに,  $(x, y)$  に対して 2 次行ベクトル  $(f_x(x, y), f_y(x, y))$  を対応させる規則

$$(5.1) \quad df = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

を  $f$  の全微分または微分という.

例 5.4. 関数  $\varphi(x, y) = x$ ,  $\psi(x, y) = y$  に対して  $d\varphi = (1, 0)$ ,  $d\psi = (0, 1)$  である. このことを

$$dx = (1, 0), \quad dy = (0, 1)$$

と書く.

この記号を用いれば (5.1) は

$$(5.2) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

と書くことができる. これが通常的全微分の表し方である.

命題 5.5. 2 変数関数  $f$  が点  $P = (a, b)$  で微分可能なとき,

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = (df)_P \mathbf{h} + \varepsilon(\mathbf{h})|\mathbf{h}| \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{h}| = \sqrt{h^2 + k^2}$$

と書くと  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0$  が成り立つ. ただし  $(df)_P \mathbf{h}$  は行ベクトルと列ベクトルの積として得られる  $1 \times 1$  行列で, これをスカラーとみなしている<sup>1</sup>.

曲線に沿う微分 数直線上の区間  $I$  上で定義された 1 変数関数  $x(t)$ ,  $y(t)$  の組  $(x(t), y(t))$  は  $I$  から座標平面  $\mathbb{R}^2$  への写像と思える:

$$\gamma: I \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

このような写像を曲線あるいは曲線のパラメータ表示という. 以下, 曲線と言え  $x(t)$ ,  $y(t)$  が微分可能となるもののみを考える<sup>2</sup>. このことをとくに断るときは “ $\gamma$  は微分可能” という.

<sup>1</sup>ここで  $(x, y)$  の  $(a, b)$  からの変化  $(h, k)$  を, 行ベクトルではなく列ベクトル  $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$  で表すことに注意. “行列を掛ける” という文脈ではベクトルは普通列ベクトルで表す. この記法に合わせるならば  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  と列ベクトルで表し,  $f(x, y)$  の代わりに  $f(\mathbf{x})$  と書くのが自然. このとき, 命題の式は

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = (df)_{\mathbf{a}} \mathbf{h} + \varepsilon(\mathbf{h})|\mathbf{h}|$$

と書ける. この方がすっきりするはずだが, 座標平面上の点の座標を横に並べる高等学校の教科書の記号を慮って, ここにあるような “ませこぜ” な記号を用いた.

<sup>2</sup>だからといって  $\gamma$  が “なめらか” な曲線になるとは限らない. おなじみのサイクロイドを思い出そう.

曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  に対して

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \left( \frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right)$$

を曲線上の点  $(x(t), y(t))$  における速度ベクトルという<sup>3</sup> .

さて, 2 変数関数  $f(x, y)$  と曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  に対して

$$(5.3) \quad F(t) = f(x(t), y(t))$$

は, 1 変数関数を与える .

命題 5.6. 2 変数関数  $f(x, y)$  と曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  がともに微分可能であるとき, (5.3) は微分可能で

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ .

証明 . 実数  $t$  を一つ固定して

$$\varepsilon_1(\delta) := \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} - \dot{x}(t), \quad \varepsilon_2(\delta) := \frac{y(t+\delta) - y(t)}{\delta} - \dot{y}(t)$$

とおけば,  $x, y$  の微分可能性より  $\delta \rightarrow 0$  のとき  $\varepsilon_j(\delta) \rightarrow 0$  ( $j = 1, 2$ ) . さらに

$$h(\delta) := \delta(\dot{x}(t) + \varepsilon_1(\delta)), \quad k(\delta) := \delta(\dot{y}(t) + \varepsilon_2(\delta))$$

とおけば,  $\delta \rightarrow 0$  のとき  $h, k \rightarrow 0$  が成り立つ . これらの記号を用いて,  $f$  の微分可能性に注意すれば,

$$\begin{aligned} F(t+\delta) - F(t) &= f(x(t+\delta), y(t+\delta)) - f(x(t), y(t)) \\ &= f(x(t) + h(\delta), y(t) + k(\delta)) - f(x(t), y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))h(\delta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))k(\delta) + \varepsilon(h(\delta), k(\delta))\sqrt{h(\delta)^2 + k(\delta)^2} \end{aligned}$$

となる . ただし  $\varepsilon(h, k)$  は  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  のときに 0 に近づく関数である . この式の両辺を  $\delta$  で割って  $\delta \rightarrow 0$  とすると結論が得られる .  $\square$

<sup>3</sup>速度 velocity と速さ speed の違いは説明しなくてよいですね .

命題 5.6 の結論の式は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (df)\dot{\gamma}$$

などと書くことができる . ここで, 速度ベクトル  $\dot{\gamma}$  は列ベクトルとみなしている .

方向微分 列ベクトル  $\mathbf{v} = {}^t(v_1, v_2)$  と点  $P = (a, b)$  に対して  $\gamma(t) = {}^t(a + tv_1, b + tv_2) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$  ( $\mathbf{a} = {}^t(a, b)$ ) とおくと,  $\gamma(t)$  は  $t=0$  で点  $P$  を出発し, 一定の速度  $\mathbf{v}$  で動く運動とみなすことができる . この  $\gamma$  と, 点  $P$  のまわりで定義された 2 変数関数  $f$  に対して (5.3) で定義される  $F(t)$  を考えると,

$$(5.4) \quad F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v_2 = (df)_P\mathbf{v}$$

となるのがわかる . この右辺の量を, 関数  $f$  の点  $P$  における  $\mathbf{v}$  方向の方向微分という .

勾配ベクトル 点  $P = (a, b)$  の近くで定義された微分可能な関数  $f$  に対してベクトル

$$\text{grad } f_P := \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

のことを  $f$  の  $P$  における勾配ベクトル gradient vector という<sup>4</sup> . これを用いると, 方向微分 (5.4) は

$$(df)_P\mathbf{v} = ((\text{grad } f)_P) \cdot \mathbf{v}$$

と内積 “ $\cdot$ ” を用いて表すことができる .

<sup>4</sup>全微分  $(df)$  は行ベクトルだったが, それを “縦に並べかえた” だけ .

## 問題 5

- 5-1 2変数関数が  $f$  が“標高を表すスカラ場”，曲線  $\gamma(t)$  が，時刻  $t$  とともに移動する人の運動と思うとき，式 (5.3) で表される一変数関数はどのようなものか，説明しなさい．
- 5-2 平面上の点  $(x, y)$  における標高が，多項式  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  で表されているような世界があるとする．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くととき，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる区間を指摘しなさい．ヒント：考えている旅は  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  となる．
- 5-3 点  $P = (a, b)$  を含む領域で定義された 2 変数関数  $f$  の  $P$  における全微分  $(df)_P$  は  $(0, 0)$  でないとする．このとき， $f$  の点  $P$  における単位ベクトル  $v$  方向の方向微分  $(df)_P v$  が最大になるのは  $v$  が  $(\text{grad}_f)_P$  と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント： $v$  は単位ベクトルであることに注意． $v = {}^t(\cos t, \sin t)$  と表される．
- 5-4 点  $P = (a, b)$  を含む領域で定義された 2 変数関数  $f$  の  $P$  における全微分  $(df)_P$  は  $(0, 0)$  でないとする．点  $P$  を通る  $f$  の等高線を  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $\gamma(0) = P$ ) とパラメータ表示するとき， $t = 0$  における  $\gamma$  の速度ベクトル  $\dot{\gamma}(0)$  は  $(\text{grad}_f)_P$  に直交することを示しなさい．すなわち，“等高線は勾配ベクトルに直交する”．
- 5-5 関数  $f$  を次のように定義する：

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (y = x^2 \text{ かつ } x \neq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} .$$

すると， $v = {}^t(v_1, v_2)$  に対して， $f$  の原点における  $v$  方向の方向微分

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(tv_1, tv_2)$$

は 0 になることを示しなさい． $f$  は原点で連続か．

## 6 合成関数の微分公式

合成関数の微分 (チェイン・ルール)

命題 6.1 (合成関数の微分公式 (命題 4.6 再録)). 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された 2 変数関数  $f(x, y)$  と, 像が  $D$  に含まれる曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  がともに微分可能であるとき, 一変数関数

$F(t) = f(x(t), y(t))$  は微分可能で,

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ.

偏微分の意味を考えれば, 命題 6.1 から直ちに次のことがわかる:

系 6.2 (チェイン・ルール). 2 変数関数  $f(x, y)$  と, 2 つの 2 変数関数の組

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

がともに微分可能であるとき, 2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

は微分可能で,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta)$$

が成り立つ.

注意 6.3. 物理学や工学では, 系 6.2 の  $\tilde{f}(\xi, \eta)$  のことを  $f(\xi, \eta)$  のように  $f(x, y)$  と同じ  $f$  を用いて表すことがある. 文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である. このとき (適当に省略をして) 系 6.2 の結論の式を

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と表すことができる. あるいは, 従属変数に名前をつけて

$$z = f(x, y) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \tilde{f}(\xi, \eta)$$

と書いたとき, チェイン・ルールを

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と書くこともできる.

$\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{R}^n$  への写像とその微分 正の整数  $m$  に対して,  $m$  個の実数の組全体の集合を  $\mathbb{R}^m$  と書くのであった (講義資料 1, テキスト 3 ページ). 領域  $D \subset \mathbb{R}^m$  上で定義された写像  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  を考える. ただし  $n$  も正の整数である. この写像は  $D$  の各点  $(x_1, \dots, x_m)$  に対して  $\mathbb{R}^n$  の要素  $F(x_1, \dots, x_m)$  を対応させる対応の規則である.  $y = F(x_1, \dots, x_m)$  とおくと  $\mathbb{R}^n$  の要素であるから,  $n$  個の実数の組であり, それを  $(y_1, \dots, y_n)$  と書けばそれぞれの成分  $y_j$  は  $(x_1, \dots, x_m)$  によって定まる一つの実数である. すなわち  $y_j$  は  $(x_1, \dots, x_m)$  の関数となっている. 以上の考察から<sup>1</sup> 写像  $F: \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  とは領域  $D \subset \mathbb{R}^m$  上で定義された  $n$  個の関数の組とみなすことができる:

$$(6.1) \quad F: \mathbb{R}^m \supset D \ni (x_1, \dots, x_m) \\ \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^n.$$

ただし  $F_j: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) は  $D$  上で定義された関数であり,  $F$  の成分とよぶ. 写像  $F$  の成分が  $F_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) であることを  $F = (F_1, \dots, F_n)$  と書くことにしよう.

写像  $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $C^r$ -級であるとは<sup>2</sup>, 各  $j$  に対して関数  $F_j: D \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^r$ -級 (講義資料 3 参照) となることである.

定義 6.4. 領域  $D \subset \mathbb{R}^m$  上で定義された  $C^1$ -級の写像  $F = (F_1, \dots, F_n): D \rightarrow$

<sup>1</sup>以下のことが最初から当たり前と思える人はそんな考察をしなくてもよい

<sup>2</sup>本当は微分可能性から定義していくべきだが, 簡単のため  $C^r$ -級概念だけを定義しておく. こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない.

$\mathbb{R}^n$  に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (n \times m \text{ 行列})$$

を  $F$  の微分 differential またはヤコビ行列 Jacobian matrix という。ただし  $(x_1, \dots, x_m)$  は  $D \subset \mathbb{R}^m$  の座標である。

合成写像とその微分 写像  $F: \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  と  $G: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^k$  が与えられ、かつ任意の  $x \in D$  に対して  $F(x) \in U$  が成り立つとき、

$$G \circ F: \mathbb{R}^m \supset D \ni x \mapsto G(F(x)) \in \mathbb{R}^k$$

で与えられる写像  $G \circ F: \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^k$  を  $F$  と  $G$  の合成写像という。

命題 6.5. 上の状況で、 $F, G$  がともに  $C^1$ -級ならば

$$d(G \circ F) = dG dF, \quad \text{すなわち} \quad d(G \circ F)(x) = dG(F(x)) dF(x)$$

が成り立つ。ただし右辺の積は行列の積を表す。

逆写像 領域  $D \subset \mathbb{R}^m$  の各点  $x$  に対してそれ自身を対応させる対応の規則

$$\text{id}_D: D \ni x \mapsto \text{id}_D(x) = x \in D$$

を  $D$  上の恒等写像 identity map という。

領域  $D \subset \mathbb{R}^m$  から  $U \subset \mathbb{R}^m$  への写像  $F: D \rightarrow U$  に対して、写像  $G: U \rightarrow D$  で

$$G \circ F = \text{id}_D, \quad F \circ G = \text{id}_U$$

を満たすものが存在するとき、 $G$  を  $F$  の逆写像 inverse map といい、 $G = F^{-1}$  と書く。

例 6.6. 領域

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}, \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

に対して

$$F: D \ni (r, \theta) \mapsto F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in U,$$

$$G: U \ni (x, y) \mapsto \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} \frac{y}{x} \right) \in D$$

とすると  $G = F^{-1}$ ,  $F = G^{-1}$  である。実際、 $r > 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  に注意すれば

$$\begin{aligned} G \circ F(r, \theta) &= G(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left( \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}, \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \right) \\ &= (r, \tan^{-1} \tan \theta) = (r, \theta), \end{aligned}$$

一方、 $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  とすると  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  だから  $\cos \theta > 0$ 。したがって、 $x > 0$  に注意して

$$\begin{aligned} \cos \tan^{-1} \frac{y}{x} &= \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \tan^{-1} \frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \tan^{-1} \frac{y}{x} &= \sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} F \circ G(x, y) &= F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} \frac{y}{x}\right) \\ &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} \cos \tan^{-1} \frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2} \sin \tan^{-1} \frac{y}{x}\right) = (x, y). \end{aligned}$$

注意 6.7. 座標平面上の点  $(x, y)$  に対して例 6.6 のように  $(r, \theta) = G(x, y)$  と定めるとき、 $(r, \theta)$  を座標平面の極座標 polar coordinate system という<sup>3</sup>。これに対して、 $(x, y)$  を直交座標系あるいはデカルト座標系 Cartesian coordinate system という。

命題 6.8. 写像  $F: \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  が逆写像  $G = F^{-1}$  をもち、 $F, F^{-1}$  ともに  $C^1$ -級ならば

$$dF^{-1} = (dF)^{-1} \quad \text{すなわち} \quad d(F^{-1})(F(x)) = (dF(x))^{-1}$$

<sup>3</sup> 偏角  $\theta$  の変域は  $-\pi < \theta < \pi$  まで拡張することができる。

が成り立つ．ただし右辺の “-1” は  $m$  次正方行列の逆行列を表す．

証明．恒等写像の微分が単位行列  $E$  となることに注意して， $F^{-1} \circ F = \text{id}_D$  に命題 6.5 を適用すれば  $dF^{-1}dF = E$ ，また  $F \circ F^{-1} = \text{id}_U$  に命題 6.5 を適用すれば  $dFdF^{-1} = E$ ．したがって  $dF^{-1}$  は  $dF$  の逆行列である（逆行列の定義）．  $\square$

### 変数変換

例 6.9 (平面極座標とラプラシアン)．例 6.6 の状況を考える：

$$(6.2) \quad x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta.$$

このとき  $F: (r, \theta) \mapsto (x, y)$  の微分は

$$(6.3) \quad dF = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

である．一方，逆写像  $G = F^{-1}: (x, y) \mapsto (r, \theta)$  は  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  と表されているから

$$(6.4) \quad dG = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

となる．

平面上の  $C^2$ -級関数  $f(x, y)$  に対して

$$(6.5) \quad \Delta z = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を対応させる  $\Delta$  をラプラス作用素 Laplacian<sup>4</sup>という．いま， $f(x, y)$  を (6.2) によって  $(r, \theta)$  の関数とみなしたとき， $\Delta f$  を  $f$  の  $r, \theta$  に関する偏導関数を用いて表そう．

<sup>4</sup>物理学や工学では至るところに現れる．

式 (6.4) とチェイン・ルール (系 6.2) を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= r_x \frac{\partial f}{\partial r} + \theta_x \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r - \frac{y}{x^2+y^2} f_\theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r - \frac{y}{x^2+y^2} f_\theta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f_r}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right) f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial f_\theta}{\partial x} \\ &= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{rr} - \frac{y}{x^2+y^2} f_{r\theta} \right) \\ &\quad + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{\theta r} - \frac{y}{x^2+y^2} f_{\theta\theta} \right) \\ &= \frac{x^2}{x^2+y^2} f_{rr} - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_{r\theta} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} f_{\theta\theta} \\ &\quad + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{x^2+y^2} f_{rr} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_{r\theta} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} f_{\theta\theta} \\ &\quad + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta. \end{aligned}$$

したがって  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  に注意すれば

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

となる．

例 6.10. 例 6.9 を少し異なった方法で計算しよう：上の記号をそのまま用いると，命題 6.8 をもちいれば

$$(6.6) \quad dG = d(F^{-1}) = (dF)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix}$$

である．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

これを用いれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta f_{rr} - \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta f_{r\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta f_r + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta f_\theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta f_{rr} + \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta f_{r\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta f_r - \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta f_\theta \end{aligned}$$

なので，例 6.9 と同じ結果を得る．

## 問題 6

- 6-1 命題 6.5 の結論の式を成分を用いて表しなさい．  
 6-2 命題 6.1 は命題 6.5 の特別な場合であることを確かめなさい．  
 6-3 例 6.6 の状況を絵に描きなさい．  
 6-4 平面のスカラ場  $f(x, y)$  が  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$  をみたしているとき， $f$  を調和関数という．
- 一変数関数  $F(t)$  を用いて  $f(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$  の形に表される調和関数をすべて求めなさい．
  - $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  は調和関数であることを確かめなさい．
- 6-5 定数  $c (\neq 0)$  に対して

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

により変数変換  $(t, x) \mapsto (\xi, \eta)$  を定める．このとき， $C^2$ -級関数  $f(t, x)$  に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$$

となることを確かめなさい．

さらに， $f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$  を満たす  $C^2$ -級関数  $f$  は，2 つの  $C^2$ -級の一変数関数  $F, G$  を用いて

$$f(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

という形に書けることを示しなさい．

方程式  $f_{tt} = c^2 f_{xx}$  を波動方程式という．ここに述べたことを，“波動方程式の d'Alembert の解法” という．

- 6-6 空間のスカラ場  $f(x, y, z)$  に対して  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$  を対応させる  $\Delta$  を空間のラプラス作用素という．空間の変数変換

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \cos \varphi, & z &= r \sin \theta \\ & & & & & (r > 0, -\pi < \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\cos \varphi} & \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} & 0 \\ -\frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

であることを確かめ，

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r^2} \tan \varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい．

## 7 陰関数の微分法

陰関数 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された二変数関数  $f(x, y)$  に対して, 式

$$(7.1) \quad f(x, y) = 0$$

は  $x$  と  $y$  の関係式である. この関係式を “ $y$  について解く” ことができたとき  
しよう:

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$

このとき, 与えられた (適当な範囲の)  $x$  に対して, (7.1) を満たす  $y$  がただ一つ存在する. すなわち (7.1) は “ $y$  は  $x$  の関数である” という暗に表している. このとき, (7.1) は  $y = \varphi(x)$  の陰関数 an implicit function 表示という.

例 7.1. •  $f(x, y) = 2x - 3y + 5$  とすると, 関係式  $f(x, y) = 0$  は  $y = \varphi(x)$  ( $\varphi(x) = \frac{1}{3}(2x + 5)$ ) と書き換えることができる. したがって  $f(x, y) = 0$  は  $y$  は  $x$  の関数であることを表している. また, 同じ関係式を解くことによって  $x = \psi(y) = \frac{1}{2}(3y - 5)$  となるので,  $f(x, y) = 0$  は  $x$  が  $y$  の関数であることも表している.

•  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  とおくと,  $g(x, y) = 0$  は  $y$  について解くことができない. 実際

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - x^2$$

であるから,  $x$  を与えても対応する  $y$  は一般に一つには決まらない. しかし,  $g$  の定義域を  $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  に限って考えると

$$(x, y) \in U \text{ かつ } g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

となり  $y$  は  $x$  の関数とみなすことができる.

また,  $g$  の定義域を  $U' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$  に限って考えると  $g(x, y) = 0$  は関数

$$y = -\sqrt{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

を与える.

いずれの場合も  $x$  は  $y$  の関数とみなすことはできないが, たとえば  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$  に限れば  $x = \sqrt{1 - y^2}$  と考えることができる.

同様に, 3 変数以上の関数  $f(x_1, \dots, x_n)$  に対して,  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  を変数  $x_1$  について解くことができ,  $x_1 = \varphi(x_2, \dots, x_n)$  とかけるとき,  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  を  $\varphi$  の陰関数表示という.

陰関数定理 一般に  $f(x, y) = 0$  がいつ  $y$  について ( $x$  について) とけるかを判定するのは難しいが, 次の十分条件が知られている:

定理 7.2 (陰関数定理の特別な場合). 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された  $C^r$ -級関数  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  と点  $P = (x_0, y_0) \in D$  で  $F(x_0, y_0) = 0$  をみたしているものをとる. ただし  $r = 1, 2, \dots, \infty$  とする.

もし, 点  $P$  において  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  が成り立っているならば,

- 点  $P$  を含む開集合  $U \subset D$ ,
- ある  $\mathbb{R}$  の開区間  $I$  と  $C^r$ -級の一変数関数  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$

で次を満たすものが存在する:

点  $(x, y) \in U$  が  $F(x, y) = 0$  を満たすならば  $x \in I$  かつ  $y = \varphi(x)$  が成り立つ.

とくに各  $x \in I$  に対して

$$(7.2) \quad F(x, \varphi(x)) = 0$$

が成り立つ.

この定理は,  $(x_0, y_0)$  の十分近くで,  $F(x, y) = 0$  が  $y = \varphi(x)$  の形にとけることを表している. また, 定理 7.2 の第 1 段落の仮定のもと,  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  が成り立っているならば,  $F(x, y) = 0$  は  $x = \psi(y)$  の形にとけることもわかる.

独立変数の個数が多いときも, 定理 7.2 に対応する次が成り立つ:



定理 7.3. 正の整数  $m$  に対して, 領域  $D \subset \mathbb{R}^m$  で定義された  $C^r$ -級関数  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  と点  $P = (a_1, \dots, a_m) \in D$  で  $F(a_1, \dots, a_m) = 0$  をみたしているものをとる. ただし  $r = 1, 2, \dots, \infty$  とする.

もし, 点  $P$  において  $F_{x_m}(a_1, \dots, a_m) \neq 0$  が成り立っているならば,

- 点  $P$  を含む開集合  $U \subset D$ ,
- ある  $\mathbb{R}^{m-1}$  の領域  $V$  と  $C^r$ -級の  $(m-1)$ -変数関数  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$

で次を満たすものが存在する:

点  $(x_1, \dots, x_m) \in U$  が  $F(x_1, \dots, x_m) = 0$  を満たすならば  
 $(x_1, \dots, x_{m-1} \in V$  かつ  $y = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$  が成り立つ.

とくに各  $x \in I$  に対して

$$(7.3) \quad F(x_1, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0$$

が成り立つ.

なめらかな曲線 いま, 集合  $C = \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$  点 (要素)  $P$  に対して,  $P$  を含む開集合  $U$  をうまくとって  $C$  と  $U$  の共通部分  $C \cap U$  が  $C^\infty$ -級関数のグラフと合同であるとき,  $C$  は  $P$  の近くで “なめらかな曲線” であるということにする. とくに 各点の近くでなめらかな曲線であるとき  $C$  を単になめらかな曲線 a smooth curve であるという. 定理 7.2 から次がすぐわかる:

命題 7.4. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された  $C^\infty$ -級関数  $F$  に対して

$$C := \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$$

とおくとき, 各点  $P \in C$  で  $(dF)_P \neq (0, 0)$  ならば  $C$  はなめらかな曲線を与える.

注意 7.5. 命題 7.4 の逆は成立しない. 実際  $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$  とすると  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$  は原点を中心とする半径 1 の円となり, なめらかな曲線を与えるが,  $C$  の各点で  $dF = (0, 0)$  である.

例 7.6. • いずれもが 0 でない定数  $a, b$  に対して  $\mathbb{R}^2$  で定義された関数

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 - 1$$

を考えると  $dF = (2ax, 2by)$  であるから,  $dF_{(x,y)} = (0, 0)$  となるのは  $(x, y) = (0, 0)$  のときのみ. ここで  $F(0, 0) = -1 \neq 0$  だから

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

上で  $dF \neq (0, 0)$ . したがって  $C$  はなめらかな曲線である.

- 関数

$$F(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

に対して

$$dF_{(x,y)} = (2x(2(x^2 + y^2) - 1), 2y(2(x^2 + y^2) + 1))$$

だから  $dF_{(x,y)} = (0, 0)$  となるのは

$$(x, y) = (0, 0), \quad (1/\sqrt{2}, 0), \quad (-1/\sqrt{2}, 0)$$

のときのみである. とくに  $F(\pm 1/\sqrt{2}, 0) \neq 0$ ,  $F(0, 0) = 0$  なので,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

とすると  $(0, 0)$  の近くをのぞいて  $C$  はなめらかな曲線である.

#### 陰関数の微分法

命題 7.7. 定理 7.2 の状況で得られた関数  $\varphi(x)$  に対して

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

が成り立つ. ただし  $y = \varphi(x)$  である.

この定理の結論の式を

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

などと書くことがある。

証明. 恒等式  $F(x, \varphi(x)) = 0$  の両辺を  $x$  で微分すると, チェイン・ルール (命題 5.6 または系 6.2) により

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{d\varphi(x)}{dx} \end{aligned}$$

となるが, 定理 7.2 の状況で, 考えている点の近くでは  $F_y \neq 0$  が成り立っているから結論が得られる。□

同様に, 陰関数  $F(x, y) = 0$  が  $x = \psi(y)$  と表せるとき

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\psi}{dy}(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} \quad (x = \psi(y))$$

が成り立つ。

例 7.8. 正の定数  $a, b$  に対して

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\} \quad \left( F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

は楕円である。  $C$  上の点  $P = (x_0, y_0)$  におけるこの曲線の接線の方程式を求めよう。いま  $y_0 \neq 0$  とすると  $F_y(x_0, y_0) = 2y_0/b^2 \neq 0$  なので定理 7.2 が適用できて  $P$  の近くで  $C$  は関数のグラフ  $y = \varphi(x)$  で表される。とくに  $y_0 = \varphi(x_0)$  に注意すれば, 陰関数の微分公式 (命題 7.7) を用いて

$$\frac{d\varphi}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = -\frac{2x_0/a^2}{2y_0/b^2} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

したがって接線の方程式は

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) + y_0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

となる。

一方  $y_0 = 0$  のときは  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  なので,  $x$  と  $y$  の役割を変えて考えれば上と同じ式で接線が表されることがわかる。

さらに変数の多い場合, すなわち定理 7.3 の状況でも

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{m-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m)}{\frac{\partial F}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m)} \quad (x_m = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1}))$$

が各  $j = 1, \dots, m-1$  に対して成立する。

一般の陰関数定理

この陰関数定理 7.3 は “ $m$  個の変数の一つの関係式を満たしているならば (適当な条件のもと) そのうち一つの変数について解くことができる” ということを表している。このことを一般に述べたのが次の陰関数定理である:

定理 (陰関数定理). 領域  $D \subset \mathbb{R}^m$  上で定義された  $k$  個の  $C^r$ -級関数  $F_1, \dots, F_k$  ( $k < m$ ) が与えられているとする。点  $P = (a_1, \dots, a_m)$  が

$$F_j(a_1, \dots, a_m) = 0 \quad (j = 1, \dots, k)$$

を満たし, かつ

$$(*) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(P) \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つならば,  $P$  を含む  $D$  の領域  $U$ , 点  $(a_{k+1}, \dots, a_m)$  を含む  $\mathbb{R}^{m-k}$  の領域  $V$  および  $V$  上で定義された  $k$  個の  $C^r$ -級関数  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  で, 次を満たすものが存在する:

点  $(x_1, \dots, x_m) \in U$  が

$$F_1(x_1, \dots, x_m) = \cdots = F_k(x_1, \dots, x_m)$$

を満たしているならば,  $(x_{k+1}, \dots, x_m) \in V$  で

$$x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, x_k = \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m)$$

が成り立つ。

とくに

$$F(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m))$$

が成立する .

すなわち “ $m$  個の変数が  $k$  個の関係式を満たしているならば、適当な条件のもと  $k$  個の変数はのこりの  $(m - k)$  個の変数の関数となる” .

ここでは “ $x_1, \dots, x_k$  について解ける” という形で定理の主張を述べたが、実際には変数の順番を変えたバージョンを用いることがある . 命題 7.4 のように、どの変数かを特定しないなら条件 (\*) は

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m}(P) \end{pmatrix} = k$$

と書くことができる . 命題 7.4 に対応する結論は、

$$\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid F_j(x_1, \dots, x_m) = 0, j = 1, \dots, k\}$$

は点  $P$  の近くで  $\mathbb{R}^m$  のなめらかな部分多様体になると述べられるが、多様体を真面目に定義するのは大変なので、この講義ではそれ以上言及しない .

陰関数定理は、次の逆関数定理から示すことができる :

定理 (逆写像定理). 領域  $D \in \mathbb{R}^m$  上で定義された  $C^r$ -級写像

$$f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

が、点  $P \in D$  において

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(P) \end{pmatrix} \neq 0$$

を満たしているならば、 $P$  を含む領域  $U \in D$  と  $f(P)$  を含む  $\mathbb{R}^m$  の領域  $V$ 、および  $V$  で定義された  $C^r$ -級写像  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  で  $f \circ g(y) = y$  ( $y \in V$ )、 $g \circ f(x) = x$  ( $x \in U$ ) を満たすもの、すなわち  $f$  の逆写像が存在する .

前回は、このことを暗黙のうちに認めていた . 証明はここでは紹介しない . 逆写像定理を用いて陰関数定理を示すには、与えられた写像  $F = (F_1, \dots, F_k): \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^k$  に対して

$$f = (F_1, \dots, F_k, x_{k+1}, \dots, x_m): \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

に対して逆関数定理を適用すればよい (詳細はここでは扱わない) .

## 問題 7

7-1 定理 7.2 から命題 7.4 を導きなさい .

7-2  $F(x, y) = x^2 - y^3$  とするとき  $F(x, y) = 0$  で与えられる  $\mathbb{R}^2$  の部分集合はなめらかな曲線であるかを調べ、この図形の概形を描きなさい .

7-3 定理 7.2 の状況、すなわち  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$  の点  $P = (x_0, y_0)$  において  $F_y \neq 0$  であり、 $P$  の近くで  $C$  がグラフ  $y = \varphi(x)$  と表されているとする . このとき

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つことを示しなさい . ただし、右辺の  $F_{xx}$  などは  $(x, \varphi(x))$  における値を表す .

7-4 定数  $b$  に対して

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) - b, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

とおく . このとき  $C$  がグラフ  $y = \varphi(x)$  と書けるような範囲を調べ、そこで  $\varphi$  の増減、変曲点を調べ  $C$  の概形を描きなさい (ヒント :  $b$  の値によって場合分けが起きる) .

## 8 微分方程式

今回は、微分や偏微分が応用の場面で現れる“微分方程式”を紹介する。現象がどのような微分方程式で表されるか、という問題は数学の問題ではなく、その現象をあつかう諸科学の問題である。したがって“なんでそれが成り立つの?”という質問はこの授業の範囲外(ここでやることではない)と思ってほしい。また、微分方程式の一般論をここで展開するつもりも一切ない。偏微分、ラプラスアンなどがどのような場面に現れるか、という風景をあらかじめ眺めるのが目標である。この節では、現れる関数はとくに断りのない限り、すきなだけ微分可能( $C^\infty$ -級)としておく。

### 8.1 常微分方程式

一変数関数  $u(t)$  とその導関数、2 次導関数...の間の関係式を常微分方程式といい、その関係式を満たす関数  $u(t)$  を微分方程式の解という。

例 8.1. 放射性物質  $A$  が崩壊していく状況を考える。時刻  $t$  における物質  $A$  の質量を  $u(t)$  とおくと  $u(t)$  は常微分方程式

$$(8.1) \quad \frac{du}{dt} = -\lambda u \quad (\lambda \text{ は正の定数})$$

を満たす。任意の定数  $k$  に対して  $u(t) = ke^{-\lambda t}$  はこの方程式の解である。

さらに時刻  $t = t_0$  で物質  $A$  が  $k_0$  kg あったとすると、時刻  $t$  における質量  $u(t)$  は方程式 (8.1) に加えて

$$(8.2) \quad u(t_0) = k_0$$

を満たさなければならない。常微分方程式 (8.1) の、条件 (8.2) を満たす解は  $u(t) = k_0 \exp\{-\lambda(t - t_0)\}$  である<sup>1</sup>。

(8.2) のような特定の独立変数の値における未知関数の値を指定する条件のことを、常微分方程式の初期条件といい、初期条件を満たす常微分方程式の解を求める問題を常微分方程式の初期値問題という。

<sup>1</sup>2013 年 5 月 28 日

<sup>2</sup> $e^x$  のことを  $\exp(X)$  と書くこともある。

例 8.2. 理想的なばねの先端につけた質量  $m$  の質点が振動している状況を考える。ばねに沿って  $x$  軸をとり、平衡点を原点とする。質点に働く力はフックの法則に従うばねの復元力  $-kx$  ( $k > 0$  はばね定数) および速度に比例する空気抵抗  $-m\gamma \frac{dx}{dt}$  ( $\gamma > 0$  は定数) のみとすると、時刻  $t$  におけるばねの位置  $x(t)$  は

$$(8.3) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

を満たす。

この方程式は  $x = x(t)$  の 2 次導関数を含んでいるので 2 階常微分方程式という。これに対して (8.1) のような方程式を 1 階常微分方程式という。

ばねの振動は、時刻  $t = t_0$  でのおもりの位置と速度によって定まる。すなわち、この方程式に関する初期値問題とは、

$$(8.4) \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(t_0) = v_0$$

なる条件を満たす解を求めることである。

例 8.3. 区間  $\{t | t > 0\}$  で定義された関数  $f(t)$  に関する微分方程式の初期値問題

$$(8.5) \quad f''(t) + \frac{p}{t}f'(t) = 0, \quad f(1) = \alpha, \quad f'(1) = \beta$$

を考える。ただし  $p, \alpha, \beta$  は定数である。この方程式の解は

$$f(t) = \frac{\beta}{1-p}(t^{1-p} - 1) + \alpha \quad (p \neq 1 \text{ のとき})$$

$$f(t) = \beta \log t + \alpha \quad (p = 1 \text{ のとき})$$

となる。

### 8.2 偏微分方程式

多変数関数の偏導関数の関係式を偏微分方程式、その関係式を満たす関数を偏微分方程式の解という。

ラプラスの方程式・ポアソンの方程式 2 変数関数  $u = u(x, y)$ , 3 変数関数  $w = w(x, y, z)$  をそれぞれ座標平面, 座標空間のスカラ場とみなすとき,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

によりあたらしい関数をつくる対応  $\Delta$  をラプラス作用素 (Laplacian) という.

とくに  $C^2$ -級関数  $u(x, y)$  ( $w(x, y, z)$ ) が偏微分方程式  $\Delta u = 0$  ( $\Delta w = 0$ ) (ラプラス方程式と呼ばれる) を満たすとき,  $u$  ( $w$ ) は調和関数 harmonic function と呼ばれる.

ラプラス方程式はさまざまな場面に現れる. たとえば, 真空中の静電場のポテンシャル (電位) は調和関数となることは電磁気学で学ぶ. また, ニュートンの万有引力の法則に従う重力場のポテンシャル (重力の位置エネルギー) は調和関数となることは力学で学ぶ. さらに, 空間に電荷や質量が分布している場合は, これらのポテンシャルは  $\Delta w = \rho$  ( $\rho = \rho(x, y, z)$  は点  $(x, y, z)$  における電荷 (質量) 密度) を満たす. このような  $\Delta w = \rho$  ( $\rho$  は既知関数) の形の方程式をポアソン方程式とよぶ.

例 8.4. 平面のスカラ場  $u = u(x, y)$  が一変数関数  $F$  を用いて  $u(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$  の形に表されるとき  $u$  は (原点を中心とする) 回転対称なスカラ場と呼ぶことにする.

回転対称な調和関数を求めよう. 極座標  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  を用いると

$$(8.6) \quad \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

となることを前々回に見たが, とくに  $u$  が回転対称なら  $u$  は  $r$  だけの関数で  $\theta$  によらない:  $u = u(r)$ . このとき  $u$  が調和関数であるためには  $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$  となることが必要十分. したがって, 例 8.3 から回転対称な平面のスカラ場は

$$u = \beta \log \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

となる.

例 8.5. 空間のスカラ場  $w = w(x, y, z)$  が  $w = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  と書けているとき, 回転対称なスカラ場と呼ぶことにする. 空間の調和関数で, 回転対称なもの

$$w = \frac{\beta}{r} + \alpha \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

と表される.

針金の熱伝導 一様な針金に沿って  $x$  軸を配置し, 時刻  $t$  における針金の位置  $x$  における針金の温度を  $u(t, x)$  とすると,  $u$  は

$$(8.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たす. この方程式を (1 次元の) 熱方程式という. ただし  $c$  は針金の熱容量と熱伝導率によって定まる正の定数である.

講義資料 2 の演習問題 2-3 でみたように

$$(8.8) \quad u_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)$$

は  $\{(t, x) \mid t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$  で定義された (8.7) の解である. これを熱方程式 (8.7) の基本解とよぶ. 高等学校数学 C で学んだ言葉を用いれば, 各  $t$  を指定するごとに  $u_0(t, x)$  は平均 0, 分散  $2ct$  (標準偏差  $\sqrt{2ct}$ ) の正規分布の密度関数である. とくに

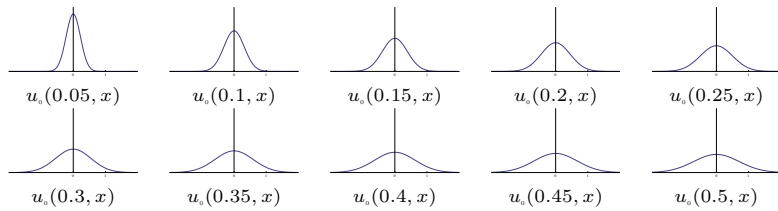
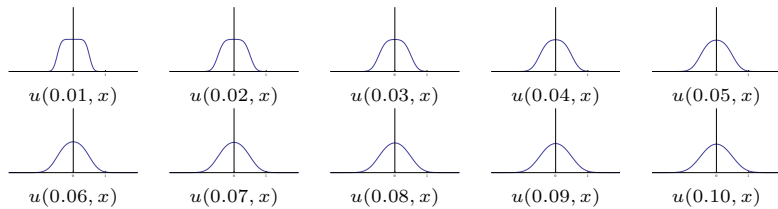
$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) dx = 1$$

が成り立つ<sup>2</sup> 時刻  $t$  を 0 に近づけると

$$\lim_{t \rightarrow +0} u_0(t, x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

となり, 極限は存在しないが,  $t > 0$  ではなめらかな関数を与えている (図 8.1).

<sup>2</sup>この積分の求め方は, 前期のうちに紹介する.

図 8.1 熱方程式の基本解 ( $c = 1$ )図 8.2 熱方程式の解 (8.9) ( $c = 1$ )

次に，関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

に対して

$$(8.9) \quad u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x-y)f(y) dy$$

とすると  $u(t, x)$  も (8.7) の解を与えており， $t \rightarrow 0$  とすると“大体”  $f$  に近づくと<sup>3</sup> (図 8.2) .

高次元の熱方程式 一様な鉄板，たとえばフライパンなどの位置  $(x, y)$ ，時刻  $t$  における温度を  $u(t, x, y)$  とすると， $u$  は

$$(8.10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u \quad (c \text{ は正の定数})$$

を満たす．ただし， $\Delta$  は  $(x, y)$  に関するラプラス作用素である：

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

<sup>3</sup>“大体”の説明は今回はしない．

たとえば  $u$  が  $(x, y)$  について回転対称，すなわち  $u = u(t, \sqrt{x^2 + y^2})$  の形になっていると仮定すると，極座標  $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$  を用いて (8.10) は

$$u_t = c \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

と書き換えることができる．とくに

$$(8.11) \quad u(t, r) = \frac{1}{4\pi\sqrt{ct}} \exp\left(-\frac{r^2}{4ct}\right)$$

はこの方程式の解である．

同様に，空間の温度分布  $u = u(t, x, y, z)$  も

$$u_t = c\Delta u \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を満たす．

弦の振動と波動方程式 一様な弦が振動している状況を考える．弦にそって  $x$  軸をとり，時刻  $t$  における弦の平衡点からのずれを  $u(t, x)$  とすると，振幅が小さいときは  $u$  は

$$(8.12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たす．ただし  $c$  は弦の張力と線密度から定まる正の定数である．これを波動方程式とよぶ．この方程式の任意の解は

$$u(t, x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

と書ける．ただし  $F, G$  は (すきなだけ微分可能な) 1 変数関数である (演習問題 5-5)<sup>4</sup> .

熱方程式と同じように，平面や空間の波動方程式は  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  と表される．太鼓の膜の振動や空間の波動は (場合によっては近似的に) この方程式により表される．

<sup>4</sup>応用上必要な解を求めるには，さらに境界条件や初期条件を考慮する必要がある．

## 問題 8

8-1 セシウム 137 ( $^{137}\text{Cs}$ ) の半減期は 30.17 年である．この場合，方程式 (8.1) の定数  $\lambda$  の値を求めなさい．(単位はどうするか)

8-2 微分方程式 (8.3) で  $\gamma = 0$  の場合を考える．このとき  $\omega = \sqrt{k/m}$  とおくと

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

が解になることを示しなさい．さらに初期値条件 (8.4) を満たす解を求めなさい．

8-3 例 8.5 を確かめなさい (問題 2-5) 参照．

8-4 (8.11) にならって空間の熱方程式の (同じような形の) 回転対称な解を求めなさい．

8-5 実数  $\theta$  に対して  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $i$  は虚数単位) と定める (オイラーの公式)．さらに，複素数  $z = x + iy$  ( $x, y$  は実数) に対して

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

と定めよう．すると， $e^z$  の実部  $\operatorname{Re} e^z$  および虚部  $\operatorname{Im} e^z$  は  $(x, y)$  の調和関数である．

8-6 複素数  $z = x + iy$  に対して  $f(z) = z^m$  ( $m$  は正の整数) とする． $\operatorname{Re} f(z)$  ( $\operatorname{Im} f(z)$ ) は  $(x, y)$  の関数とみなすことができるが，これは  $(x, y)$  の調和関数である．

## 9 一変数関数の積分再論

区間の分割 閉区間  $[a, b]$  の分割とは, 有限個の実数の列

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b)$$

のことである. 分割  $\Delta$  の幅とは

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$$

で定まる正の数のこととする.

定積分 区間  $I = [a, b]$  で定義された一変数関数  $f$  と, 区間  $I$  の分割  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  に対して

$$(9.1) \quad \bar{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^N \bar{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^N \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

と定める. ただし

$$\bar{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最大値”}),$$

$$\underline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最小値”})$$

とする.

定義 9.1. 区間  $I$  で定義された関数  $f$  が  $I$  で積分可能 integrable である, とは  $I$  の分割  $\Delta$  の幅をどんどん小さくしていったとき  $\bar{S}_\Delta, \underline{S}_\Delta$  の値が同じ値に近づくことである. このとき, その値を

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

と書く.

例 9.2. 区間  $[0, 1]$  で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

とする. 分割  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  に対して各区間  $[x_{j-1}, x_j]$  には有理数も無理数も含まれるので

$$\bar{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^N 1(x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = 1, \quad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^N 0(x_j - x_{j-1}) = 0$$

したがって  $f$  は  $[0, 1]$  で積分可能でない.

例 9.3. 区間  $[-1, 1]$  で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える.  $[-1, 1]$  の分割  $\Delta = \{x_0, \dots, x_N\}$  に対して番号  $k = k(\Delta)$  を  $0 \in [x_{k-1}, x_k]$  となるようにとると,  $f$  の最大値は, 区間  $[x_{k-1}, x_k]$  で 1, それ以外の小区間では 0 になる. また  $f$  の最小値は 0 だから,

$$\bar{S}_\Delta(f) = x_k - x_{k-1} \quad (k = k(\Delta)), \quad \underline{S}_\Delta(f) = 0.$$

ここで  $0 < x_k - x_{k-1} \leq |\Delta|$  だから,  $|\Delta|$  をどんどん小さくしていくと  $\bar{S}_\Delta(f)$  は 0 に近づく. したがって,  $f$  は  $[-1, 1]$  で積分可能で

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

である.

記号の約束として  $b < a$  のとき

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

と定める.

連続関数の積分可能性と微積分の基本定理

定理 9.4. 閉区間  $I = [a, b]$  で定義された連続関数  $f$  は  $I$  で積分可能である.

定理 9.5 (微積分の基本定理). 区間  $I = [a, b]$  で定義された連続関数  $f$  に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

とおくと  $F$  は  $I$  で微分可能で  $F'(x) = f(x)$  が成り立つ.



原始関数と積分 (定積分) の計算 一変数関数  $f$  の原始関数とは  $F'(x) = f(x)$  となる関数  $F$  のことである.

区間  $I$  で定義された関数  $f$  の2つの原始関数  $F, G$  は  $G(x) = F(x) + \text{定数}$  を満たす. 実際,

$$\frac{d}{dx}\{G(x) - F(x)\} = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

なので  $G(x) - F(x)$  は  $I$  で定数である. すなわち,

区間  $I$  で定義された関数  $f$  の原始関数は, 定数の差をのぞいてただ一つ定まる.

命題 9.6. 区間  $I$  で連続な関数  $f$  には原始関数が存在する.

証明. 区間  $I$  内の点  $a$  を一つ固定して

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

とおけばよい. □

例 9.7. 関数  $e^{-x}$  の原始関数は (定数だけの差をのぞいて)  $\int_0^x e^{-x} dx$  である.

連続関数  $f$  に対して, その原始関数が  $F(x)$  であることを

$$F(x) = \int f(x) dx$$

とかく<sup>1</sup>

命題 9.8. 区間  $I$  で連続関数  $f$  の一つの原始関数を  $F$  とするとき,  $I$  の点  $a, b$  に対して

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ.

<sup>1</sup> “+C” と積分定数を書くこともある.

曲線の長さ (道のり)

命題 9.9. 区間  $[a, b]$  で定義された  $C^1$ -級関数  $f$  のグラフの長さ (弧長) は

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

で与えられる.

証明. 区間  $[a, b]$  の分割  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  に対して点  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_N))$  を結ぶ折れ線の長さは

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2} (x_j - x_{j-1})$$

で与えられる. ここで, 平均値の定理から

$$\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = f'(\xi_j) \quad x_{j-1} < \xi_j < x_j$$

を満たす  $\xi_j$  が存在するから,

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2} (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^N \bar{F}_j \Delta_j, \quad I_\Delta \geq \sum_{j=1}^N \underline{F}_j \Delta_j$$

となる. ただし  $F(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$  とすると

$$\begin{aligned} \bar{F}_j &:= (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } F \text{ の最大値}), \\ \underline{F}_j &:= (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } F \text{ の最小値}), \end{aligned}$$

$\Delta_j = x_j - x_{j-1}$  である. ここで  $F(x)$  は連続関数だから,  $|\Delta|$  を 0 に近づけると  $I_\Delta$  は  $F(x)$  の  $a$  から  $b$  までの積分に一致する. □

系 9.10. パラメータ  $t$  により  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) と表示された平面上の  $C^1$ -級曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられる.

## 問題9

9-1 高等学校の教科書では、関数  $f(x)$  の原始関数を  $F(x)$  とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

と定義していることが多い．ここではそのような定義を採用しなかった．その理由を挙げなさい．

9-2 楕円  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) について、

- $E$  が囲む平面の部分の面積は  $\pi ab$  である．
- $E$  の長さは

$$4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \quad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

で与えられる．

- 地球の地軸を含む平面による切り口は、赤道方向に長軸、地軸方向に短軸をもつ楕円になる．赤道方向の半径は 6377.397km、極方向の半径は 6356.079km とするときこの楕円の周の長さの近似値を求めなさい．(ヒント: 近似式  $\sqrt{1-x} \doteq 1 - \frac{x}{2}$  ( $x$  が小さいとき) を用いる． $40003.5 \pm 0.1$ km くらいになるはず．)

9-3 双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  の第一象限の部分の 1 点を  $P(x, y)$  とする． $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$  とするとき、線分  $OA$ ,  $OP$ , および双曲線の弧  $AP$  で囲まれた部分の面積を  $t/2$  とするとき、 $P$  の座標  $x, y$  を  $t$  で表しなさい．

9-4 放物線  $y = x^2$  の  $0 \leq x \leq a$  に対応する部分の長さを求めなさい．

9-5 サイクロイド

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

の  $0 \leq t \leq 2\pi$  に対応する部分と  $x$  軸で囲まれる図形の面積、および弧の長さを求めなさい．

9-6 空間の半径  $R$  の球体がある．中心からの距離  $r$  における球体の (体積) 密度が  $\rho = \rho(r) \text{kg/m}^3$  で与えられるとき、球体の質量を  $\rho$  を用いて表しなさい．ただし  $\rho$  は  $[0, R]$  で定義された連続関数である．

## 10 重積分の意味と計算

長方形の分割 閉区間  $[a, b]$  と  $[c, d]$  に対して

$$\begin{aligned} [a, b] \times [c, d] &= \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\} \\ &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

を  $[a, b]$  と  $[c, d]$  の直積という．この集合は座標平面  $\mathbb{R}^2$  の長方形とその内部を表している．

いま，区間  $[a, b]$  と  $[c, d]$  の分割をそれぞれ

$$(10.1) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

ととると，長方形  $I = [a, b] \times [c, d]$  は， $mn$  個の小さな長方形に分割される：

$$I = [a, b] \times [c, d] = \bigcup_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} \Delta_{jk}, \quad \Delta_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$$

この分割の 2 つのことなる長方形は，たかだか境界にしか共通部分をもたない．このような長方形の分割を  $\Delta$  と書くとき，分割の幅とは

$$|\Delta| := \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_m - x_{m-1}), (y_1 - y_0), \dots, (y_n - y_{n-1})\}$$

で与えられる正の数のことである．

コンパクト集合  $\mathbb{R}^2$  の部分集合が閉集合 a closed set であるとは，その補集合が開集合 (第 3 節参照) となることである．連続関数  $f_1, \dots, f_n$  に対して

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x) \geq 0, \dots, f_n(x) \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

という形で表される集合は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合である．また， $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $D$  が有界であるとは，十分大きい長方形  $I$  をとれば  $D \subset I$  となることである． $\mathbb{R}^2$  の有界な閉集合のことをコンパクト部分集合 a compact set という<sup>1</sup>．

2013 年 6 月 11 日

<sup>1</sup>通常のコンパクト集合の定義とはことなるが， $\mathbb{R}^n$  の場合はこの性質をもつことがコンパクト性の必要十分条件である．

長方形上の重積分 長方形  $I = [a, b] \times [c, d]$  で定義された関数  $f$  と  $I$  の分割 (10.1) に対して

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_{jk}, \eta_{jk})(x_{j+1} - x_j)(y_{k+1} - y_k)$$

(ただし  $\xi_{jk} \in [x_{j-1}, x_j]$ ,  $\eta_{jk} \in [y_{k-1}, y_k]$ )

なる和を考える．分割の幅  $|\Delta|$  を 0 に近づけるとき， $(\xi_{jk}, \eta_{jk})$  のとり方によらずにこの和が一定の値に近づくとき，その値を長方形  $I$  上の  $f$  の重積分といい，

$$\iint_I f(x, y) dx dy$$

と書く<sup>2</sup>．

コンパクト集合上の重積分 平面  $\mathbb{R}^2$  のコンパクト部分集合  $D$  上で定義された関数  $f$  を考える．このとき， $D$  を含む長方形  $I$  をひとつとり，

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D) \end{cases}$$

と定め， $I$  上での  $\tilde{f}$  の重積分を

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_I \tilde{f}(x, y) dx dy$$

と書いて， $f$  の  $D$  上での重積分という<sup>3</sup>．

面積確定集合 コンパクト部分集合  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で，定数関数  $f(x, y) = 1$  が積分可能であるとき， $D$  を面積確定集合，

$$|D| := \iint_D dx dy$$

を  $D$  の面積という．

<sup>2</sup>習慣にしたがって積分記号  $\int$  を 2 つ並べるが，ひとつしか書かない場合もある．  
<sup>3</sup>この重積分は，コンパクト集合  $D$  を覆う長方形  $I$  のとり方によらない．

積分可能性 コンパクト集合  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された関数  $f$  が連続である，とは  $D$  を含むある開集合  $\Omega$  上で連続な関数  $\tilde{f}$  で， $D$  上で  $f$  と一致するものが存在すること，と定める．ここでは証明を与えないが，次のことは認めておきたい：

定理 10.1.  $\mathbb{R}^2$  の面積確定なコンパクト部分集合  $D$  上で定義された連続関数  $f$  は  $D$  で積分可能，すなわち

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

が存在する．

多重積分 同様に  $\mathbb{R}^3$  のコンパクト部分集合  $D$  上での積分 (三重積分)，体積確定集合，体積，さらに一般に  $\mathbb{R}^m$  上の積分も定義される．

例 10.2. •  $x$  軸にそって  $x = a$  から  $x = b$  の区間に棒が横たわっている．このとき  $x$  における棒の線密度を  $\rho(x)$  (kg/m) とすると，棒全体の質量は

$$\int_a^b \rho(x) dx$$

で与えられる．

- $xy$  平面上に，コンパクト集合  $D$  の形に板が横たわっている．このとき点  $(x, y) \in D$  における板の面密度を  $\rho(x, y)$  (kg/m<sup>2</sup>) とすると，板全体の質量は

$$\iint_D \rho(x, y) dx dy$$

で与えられる．

- 空間のコンパクト集合  $D$  の形の立体の，点  $(x, y, z) \in D$  における密度が  $\rho(x, y, z)$  (kg/m<sup>3</sup>) であるならば，立体の質量は

$$\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

である．

例 10.3. • 平面の長方形領域  $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  は面積確定で  $|I| = (b - a)(d - c)$  である．

- 区間  $[a, b]$  で定義された (一変数の) 連続関数  $\varphi(x), \psi(x)$  が  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) を満たしているとする．このとき，

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

とおく (図示せよ) と，これは  $\mathbb{R}^2$  のコンパクト部分集合である．とくに， $D$  は面積確定で，

$$|D| = \int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

が成り立つ．

実際，区間  $[a, b]$  の分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  をり，その小区間  $\Delta_j = [x_{j-1}, x_j]$  に対応する  $D$  の部分

$$D_j := \{(x, y) \in D \mid x \in \Delta_j\}$$

の面積は，分割が十分に細かいときは

$$\left[ \int_{\varphi(x_{j-1})}^{\psi(x_{j-1})} f(x_j, y) dy \right] \Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_j - x_{j-1})$$

で近似される．添字  $j$  を動かしてこれらの和をとって  $|\Delta| \rightarrow 0$  とすれば，一変数関数の積分の定義から面積の式がえられる．

- コンパクト集合  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  上で関数  $f(x, y) = x^2$  を積分する：

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

**問題 10**

10-1 テキスト 119 ページ, 章末問題 1, 2.

10-2  $\mathbb{R}^3$  原点を中心とする半径 1 の球体  $D$  の体積を

$$\iiint_D dx dy dz$$

を計算することにより求めなさい. 同様のことを  $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4$  に対して行い, 半径 1 の 4 次元球体, 5 次元球体の “体積” を求めなさい.

## 11 重積分の応用

例 11.1.  $D = \{(x, y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  の面積  $|D|$  を求めよう. 図形の対称性から

$$D' := \{(x, y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

の面積  $|D'|$  を求めれば  $|D| = 4|D'|$  である.

$$|D'| = \iint_{D'} 1 \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}} dx = \int_0^1 \left[ \sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}} \right] dy = \frac{3\pi}{32}.$$

したがって求める面積は  $3\pi/8$ .

例 11.2. 関数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b \text{ は正の定数})$$

のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の体積を求めよう.  $f(x, y)$  は

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

上で負でない値をとっている. 点  $D$  上の小さな長方形  $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]$  と, この長方形上の  $f(x, y)$  のグラフで囲まれた部分の体積は,

$$f(x, y) \Delta x \Delta y$$

で近似されるので, 考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy = \frac{2}{3} \pi ab$$

であることがわかる.

例 11.3. 空間の部分集合  $D = \{(x, y, z) \mid z^2 \leq 4x, y^2 \leq x - x^2\}$  の体積  $|D|$  を求めよう. 平面の部分集合  $D' = \{(x, y) \mid y^2 \leq x - x^2\}$  に対して

$$|D| = \iiint_D dx \, dy \, dz = \iint_{D'} dx \, dy \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dz = \iint_{D'} 4\sqrt{x} \, dx \, dy = \dots = \frac{32}{15}.$$

例 11.4. グラフ  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) の面積を求めよう. ただし  $D$  は  $\mathbb{R}^2$  のコンパクト部分集合で,  $f$  は  $D$  上で  $C^1$ -級とする.

集合  $D$  上の小さな長方形  $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]$  上のグラフは空間の 3 点

$$P = (x, y, f(x, y)),$$

$$Q = (x + \Delta x, y, f(x + \Delta x, y)),$$

$$R = (x, y + \Delta y, f(x, y + \Delta y))$$

を頂点にもち  $PQ, PR$  を 2 辺にもつ平行四辺形に近い. この微小平行四辺形の面積は, 空間ベクトルの外積 (ベクトル積) を用いて

$$\begin{aligned} & |\vec{PQ} \times \vec{PR}| \\ &= |(\Delta x, 0, f(x + \Delta x, y) - f(x, y)) \times (0, \Delta y, f(x, y + \Delta y) - f(x, y))| \\ &= \sqrt{1 + \left( \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \right)^2} \Delta x \Delta y \\ &\doteq \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

と書けるので, この総和をとれば, 求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dx \, dy$$

で求められる.

### 問題 11

11-1  $\mathbb{R}^2$  の長方形  $D = [a, b] \times [c, d]$  を含む領域で定義された  $C^2$ -級関数  $F$  に対して

$$\iint_D \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \, dx \, dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

であることを確かめなさい.

11-2 次の積分の値を求めなさい .

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \\ \iint_D \frac{x}{y} dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq x^2, 2 \leq x \leq 4\}, \\ \iint_D x^2 y dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}, \\ \iint_D \sqrt{xy} dx dy, & \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}, \\ \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, & \quad D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}. \end{aligned}$$

11-3 座標空間の次の図形の体積を求めなさい :

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad a, b, c \text{ は正の定数.} \\ \Omega &= \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leq 1 \right\} \quad a, b, c \text{ は正の定数.} \end{aligned}$$

11-4  $xy$  平面上の面積確定集合  $D$  が上半平面  $\{(x, y) \mid y > 0\}$  に含まれているとする . このとき

- $xy$  平面が座標空間に含まれているとみなす .  $D$  を  $x$  軸の周りに一回転して得られる立体の体積は

$$2\pi \iint_D y dx dy$$

である .

- $D$  の重心の座標は

$$\frac{1}{|D|} \left( \iint_D x dx dy, \iint_D y dx dy \right) \quad \left( |D| = \iint_D dx dy \right)$$

である .

11-5  $xy$  平面上のなめらかな曲線  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) を  $x$  軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

で与えられることを確かめなさい . ただし , 区間  $[a, b]$  上で  $f(x) > 0$  であるとする .

11-6  $xy$  平面上の曲線  $C$  が

$$C : \gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメータ表示されている . ただし  $x(t), y(t)$  は  $t$  の一変数関数として  $C^1$ -級で , 区間  $[a, b]$  で  $y(t) > 0$  であるとする .

- 曲線  $C$  を  $x$  軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられる .

- 曲線  $C$  の重心の座標は

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \left( \int_a^b x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right) \\ \left( L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right) \end{aligned}$$

で与えられる .

## 12 重積分の変数変換

線形変換と面積  $\mathbb{R}^2$  の線形変換

$$L_A: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (A \text{ は } 2 \text{ 次の正方行列})$$

を考える．行列  $A$  が正則，すなわち  $\det A \neq 0$  ならば  $L_A$  は逆写像をもつ．とくに  $L_A$  は 1 対 1 の写像 (単射) である．行列  $A$  が正則であるとき  $L_A$  を正則な線形変換 とよぶ．

補題 12.1. 線形変換  $L_A$  による  $\mathbb{R}^2$  の直線の像は直線または一点である．とくに  $L_A$  が正則ならば直線の像は直線になる．

証明．異なる 2 点  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  を結ぶ直線  $l$  の像を調べよう． $P, Q$  の位置ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  とすると直線  $l$  は

$$l = \{(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と表される．ここで  $L_A$  の線形性から

$$L_A((1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}) = (1-t)A\mathbf{p} + tA\mathbf{q}$$

なので， $l$  の  $L_A$  による像は

$$l' = \{(1-t)\tilde{\mathbf{p}} + t\tilde{\mathbf{q}} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \tilde{\mathbf{p}} = A\mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = A\mathbf{q}$$

とかける．とくに  $\overrightarrow{OP'} = \tilde{\mathbf{p}}, \overrightarrow{OQ'} = \tilde{\mathbf{q}}$  となる点  $P', Q'$  をとると (1)  $P' \neq Q'$  のとき， $l'$  は  $P', Q'$  を通る直線となる．(2)  $P' = Q'$  のとき  $l'$  は  $P'$  1 点からなる集合である．さらに  $\det A \neq 0$  なら写像  $L_A$  は 1 対 1 であるから (2) のケースは起こりえない．□

補題 12.2. 正則な線形変換  $L_A$  による  $\mathbb{R}^2$  の平行な 2 直線の像は平行な 2 直線である．

証明．平行な 2 直線の像は 2 つの直線であるが，これらが交わるとすると  $L_A$  が 1 対 1 であることに反する．□

補題 12.3. 直線  $l$  上の異なる 2 点  $P, Q$  をとっておく．直線  $l$  にない 2 点  $R, S$  が直線  $l$  の同じ側にあるための必要十分条件は， $\det(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$  と  $\det(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$  が同じ符号をもつことである．ここで  $\mathbb{R}^2$  のベクトルは列ベクトルとみなし， $\det$  は 2 つの 2 次列ベクトルを並べてできる行列の行列式を表す．

証明． ${}^t(a, b) = \overrightarrow{PQ}$  とおき， $\mathbf{n} = {}^t(-b, a)$  とすると，(1)  $\det(\overrightarrow{PQ}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{n})$  である．ただし右辺は  $\mathbb{R}^2$  の内積を表す．(2)  $\mathbf{n}$  は直線  $l$  に直交する零でないベクトルである．直線  $l$  上にない点  $R$  が，直線  $l$  の  $\mathbf{n}$  が指し示す側にあるための必要十分条件は  $\overrightarrow{PR}$  と  $\mathbf{n}$  が鋭角をなすことである： $(\overrightarrow{PR}, \mathbf{n}) > 0$ ．このことと (1) から結論が得られる．□

補題 12.4. 線形変換  $L_A$  によって， $\mathbb{R}^2$  の平行四辺形とその内部は  $\mathbb{R}^2$  の平行四辺形とその内部，または線分に移る．とくに  $L_A$  が正則ならば平行四辺形の像は平行四辺形である．

証明．簡単のため  $L_A$  が正則であるとし，平行四辺形  $PQRS$  の像を求める： $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ ， $\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ}$  とすると，線分  $PQ$  は  $\{(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid 0 \leq t \leq 1\}$  となるので，その像は線分  $P', Q'$  となる．ただし  $P', Q'$  はそれぞれ  $L_A$  による  $P, Q$  の像．各辺に対して同様のことを考えれば，平行四辺形の像が平行四辺形となることがわかる．さらに，平行四辺形の内部は 4 つの辺を含む直線の一方の側の共通部分なので，補題 12.3 から結論を得る (すこし端折った)．□

補題 12.5. 平行四辺形  $PQRS$  の面積は  $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$  である．ただし  $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$ ， $\mathbf{b} = \overrightarrow{PR}$  で，これらを 2 次の列ベクトルとみなしている．

証明．ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると，求める面積は

$$(12.1) \quad |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\sin \theta| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}.$$

ただし  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積を表す．ここで  $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2)$ ， $\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2)$  とおいて (12.1) を計算すれば結論を得る．□

補題 12.6. 線形変換  $L_A$  による平行四辺形  $D$  の像の面積は， $|\det A| |D|$  である．ただし  $|D|$  は  $D$  の面積である．



証明 . 平行四辺形  $D = PQRS$  の各頂点の位置ベクトルを  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$  とし ,

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$$

とおく .  $P, Q, R$  の  $L_A$  による像をそれぞれ  $P', Q', R'$  と書くと ,

$$\overrightarrow{P'Q'} = A\mathbf{q} - A\mathbf{p} = A(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = A\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{P'R'} = A\mathbf{b}$$

であるから

$$|D'| = |\det(A\mathbf{a}, A\mathbf{b})| = |\det(A(\mathbf{a}, \mathbf{b}))| = |\det A \cdot \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |\det A| |D|.$$

□

## 2 変数の変数変換 $\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された $C^1$ -級写像

$$F: \mathbb{R}^2 \supset (u, v) \mapsto F(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2$$

を考える . 微分可能性から

$$\begin{aligned} & F(a+h, b+k) \\ &= F(a, b) + \begin{pmatrix} x_u(a, b) & x_v(a, b) \\ y_u(a, b) & y_v(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k) \\ & \quad |\varepsilon(h, k)| \rightarrow 0 \quad \text{as } (h, k) \rightarrow (0, 0) \end{aligned}$$

と書ける . この  ${}^t(h, k)$  の係数行列は ,  $F$  の微分  $dF$  またはヤコビ行列 (第 6 節) である . このことから ,  $(h, k)$  が十分小さいときは , 近似式

$$\Phi(h, k) := F(a+h, b+k) - F(a, b) \doteq \begin{pmatrix} x_u(a, b) & x_v(a, b) \\ y_u(a, b) & y_v(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

が成り立つ .

記号 . ヤコビ行列の行列式を

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

と書き , ヤコビ行列式 , Jacobian という .

以下 ,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

が至るところ成立しているとする .

定理 12.7 (重積分の変数変換 ; テキスト 92 ページ) . 上の状況で  $xy$  平面上的コンパクト集合  $D$  と  $uv$  平面上的コンパクト集合  $E$  が  $F$  によって 1 対 1 に対応しているとき ,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

が成り立つ .

## 問題 12

12-1 テキスト 94 ページ , 問 6, 7; 95 ページ , 問 8, 9.

12-2 テキスト 97 ページ問 10.

12-3 テキスト 100 ページ , 問 11, 12; 101 ページ , 問 13, 14 .

12-4 テキスト 119 ページ (章末問題) 1, 2, 3, 4.

### 13 広義積分

広義積分 半開区間  $(a, b]$  で定義された連続関数  $f$  に対して

極限值  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  が存在するとき、その値を  $\int_a^b f(x) dx$

と書く。関数  $f$  が  $[a, b]$  で連続であるときも同様に  $\int_a^b f(x) dx$  が定義される。

また、区間  $[a, \infty)$  で定義された連続関数  $f$  に対して

極限值  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$  が存在するとき、その値を  $\int_a^\infty f(x) dx$

と書く。同様に  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  も定義される。

これらは定積分の概念を拡張したもので広義積分<sup>1</sup>とよばれる。とくに、定義のなかに現れる極限值が存在するとき広義積分は収束する、そうでないとき発散するという。

例 13.1. • 正の数  $\varepsilon \in (0, 1)$  に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \quad \text{なので} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

すなわち、この広義積分は収束する。

• 正の数  $\varepsilon \in (0, 1)$  に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = -\log \varepsilon \quad \text{なので} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -\log \varepsilon \rightarrow +\infty.$$

すなわち、この広義積分は発散する。

• 正の数  $M$  に対して

$$\int_0^M e^{-x} dx = 1 - e^{-M} \quad \text{なので} \quad \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} (1 - e^{-M}) = 1.$$

すなわち、この広義積分は収束する。

• 正の数  $M$  に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \log M \quad \text{なので} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \log M = +\infty$$

すなわち、この広義積分は発散する。

例 13.2. 原始関数が求まらなくても、広義積分の収束がわかる場合がある。

たとえば、定数  $k \in (0, 1)$  に対して広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$$

を考えよう。正の数  $\varepsilon \in (0, 1)$  に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t} dt \quad (x = \sin t)$$

であるが、右辺の被積分関数は  $[0, \frac{\pi}{2}]$  で連続であるから、 $\varepsilon \rightarrow +0$  の極限をとることができて<sup>2</sup>

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t} dt$$

を得る。

関数  $f(x)$  が  $(a, b)$  で連続な場合は

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x) dx$$

が  $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  としたときにその近づけ方によらずある値に収束するとき、その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

と定める。区間の一方または両方の端点が無有限でない場合<sup>3</sup>も同様に定義する。

<sup>1</sup>2013年7月16日

“こうぎせきぶん” と読む。“広義”は“広い意味”という意味。

<sup>2</sup>原始関数の連続性を用いる。

<sup>3</sup>不正確な言い方だが...

例 13.3. 正の数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \frac{x}{1-x^2} dx &= \left[ -\frac{1}{2} \log(1-x^2) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \\ &= - \left[ \frac{1}{2} (\log(1-x) + \log(1+x)) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \\ &= -\frac{1}{2} (\log \varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log \varepsilon_1) \end{aligned}$$

であるが,  $\varepsilon_1 \rightarrow +0$  のとき, 右辺の最後の項は発散するので, 広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx$$

は発散する. 特別な近づけ方で  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$  とすると, たとえば  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \rightarrow +0$  のとき

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} (\log(1-x) + \log(1+x)) \right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \rightarrow 0$$

となるが,

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx = 0 \quad \text{であるとはいわない.}$$

広義積分の収束判定 広義積分の値が具体的にわからなくても, 収束することはわかる場合がある.

事実 13.4. 区間  $I = (a, b]$  で定義された連続関数  $f, g$  がともに  $I$  上で  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$  を満たし, さらに

$$f(x) \leq g(x) \quad (x \in I), \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(x) dx \quad \text{が収束する}$$

ならば, 広義積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

は収束する.

この事実の証明には“実数の連続性”が必要である. 時間があれば後期に説明するかもしれない<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>少なくとも, これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する.

例 13.5 (ガンマ関数). 実数  $s > 0$  に対して広義積分

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

は収束する. そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

とおき, これをガンマ関数とよぶ.

例 13.6 (ベータ関数). 正の数  $p, q$  に関して広義積分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

は収束する. このようにして得られる 2 変数関数をベータ関数とよぶ.

### 問題 13

13-1 広義積分

$$\int_0^1 x^\alpha dx, \quad \int_1^{\infty} x^\beta dx$$

が収束, 発散するような実数  $\alpha, \beta$  の範囲を求めなさい.

13-2 例 13.5 の広義積分が収束すること確かめなさい. なお,

- この積分は区間の上端も下端も広義積分になっているので, たとえば  $(0, 1]$  での積分と  $[1, +\infty)$  での積分の収束を別々に示す必要がある.
- $\infty$  の側の収束性には次の事実を用いる:  $m$  を任意の正の整数としたとき,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m e^{-x} = 0.$$

これは次の不等式から示すことができる:

$$x > 0 \text{ ならば } f_m(x) := e^x - \left( 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{m!} x^m \right) > 0$$

である. このことは,  $f'_m(x) = f_{m-1}(x)$  であることに注意して数学的帰納法を用いれば示すことができる.

13-3 任意の正の数  $s$  に対して  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  であることを示しなさい. これを用いて, 正の整数  $n$  に対して  $\Gamma(n) = (n-1)!$  であることを確かめなさい.

13-4 例 13.6 の広義積分が収束すること確かめなさい.

## 14 広義積分の応用

今回は次を示す：

定理 14.1.

$$(14.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

まず，式 (14.1) で与えられる広義積分が収束することを確かめよう．関数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geq 1) \\ 1 & (-1 < x < 1) \\ e^x & (x \leq -1) \end{cases}$$

と定めると，すべての実数  $x$  で

$$0 \leq f(x) \leq \tilde{f}(x)$$

が成り立つ．さらに，1 より大きい正の数  $A, B$  に対して

$$\int_{-A}^B \tilde{f}(x) dx = \int_{-A}^{-1} e^x dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^B e^{-x} dx = 2 + \frac{2}{e} - e^{-A} - e^{-B}$$

だが， $A \rightarrow +\infty, B \rightarrow +\infty$  のとき右辺は収束するから， $\tilde{f}$  の実数全体での積分は収束する．したがって事実 13.4 から広義積分 (14.1) は収束することがわかる．

いま，正の実数  $a$  と  $R$  に対して

$$D_a = [0, a] \times [0, a] \quad E_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

とおく．すると，

$$E_a \subset I_a \subset E_{\sqrt{2}a}$$

が成り立っている．したがって

$$\iint_{E_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{E_{\sqrt{2}a}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

が成り立つ．ここで，極座標による積分を用いて

$$\iint_{E_a} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$$

が得られるから，

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) \leq \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2}).$$

ところが，中央の積分は

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left( \int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2$$

となるので， $a \rightarrow \infty$  とすれば

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

したがって

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

となり (14.1) が得られる．

## 問題 14

14-1 定数  $\mu$  と正の数  $\sigma$  に対して次を示しなさい：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \mu, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \sigma^2. \end{aligned}$$