2013 年 10 月 15 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 2

お知らせ

- 提出物に学籍番号を書かない方がいらっしゃいました．ちょっと手抜きして学籍番号を書かなかっただけ；ちょっと忘れただけなのかも知れませんが，記録を取るために，名前から学籍番号を検索しなければなりませんでした．受講者名簿はまだできていないので，前期の名簿を検索しましたよ．提出者にとって “ちょっと” かもしれませんが，確実に山田の時間を略奪しました．

前回までの訂正

- 講義資料 1, 1 ページ「講義計画」の項目で，「また，学習の動機を高めるために，**5 類に対応する専攻の教員の特別講義**を行います．別紙授業日程参照.」は削除してください．都合により後期は特別講義を実施しません．
- 講義ノート 1 ページ，脚注 6: differentia coefficient ⇒ differential coefficient
- 講義ノート 5 ページ，脚注 13: privitive ⇒ primitive
- 講義ノート 6 ページ注意 1.10 で $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ という記号を説明なしで用いました．一般に，記号 $A\setminus B$ は，集合 A から集合 B の要素をすべて取り去ってできる集合を表します：$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A \text{ かつ } x\not\in B\}$．これを $A-B$ と書くこともあるようです．
- 講義ノート 15 ページ，問題 2-9: テイラーの定理?? ⇒ テイラーの定理 2.9.

授業に関する御意見

- やったー！ジャマな中継がなくなったぞー！これからはもっとゆったり勉強ができそうだ！　**山田のコメント：** ご迷惑をおかけしました．
- 明るすぎてスクリーンが見づらかったです．　**山田のコメント：** どの紙を見よ，という指示だけをするつもりでしたので，多少ぼけていてもよいかな，と．お許しを．
- カメラが無いから先生が生き生きとしている気がします．この後学期からワイヤレスマイクを一斉に導入したようですね．
  山田のコメント： 前半：そうでしょうか．緊張を隠していたつもりですが. . . 後半：前からだと思いますが.
- 先生はどんなトラブルの時でもあせったりされないのですが，講義の内容はどう決めていらしゃるのですか.
  山田のコメント： 前半と後半の関連がよくわかりませんが. . . 前半：十分あせっています．歳をとると感情の表出が少なくなるので. . . 後半：標準的なコースですので頭に入っています
- 英語で定理とか書くのは面白いけど，結局和訳を添えて書くので二度手間で面倒です．　**山田のコメント：** 和訳をつけなければよい?
- 英語で書くのは良いアイデアだと思う．　**山田のコメント：** たぶんね． / 英語はやめてほしいです．　**山田のコメント：** なぜ?
- エントロピーって何ですか？あと，英語むずかしくてわかりません．　**山田のコメント：** 前半：熱力学の第二法則って知らない？後半：この程度で難しいとすると生活に支障をきたします（まじ).
- 一昨年の講義ノートにも二変数関数の平均値の定理は書かれていませんが，この講義では扱わないのでしょうか.
  山田のコメント： 「二変数関数の平均値の定理」のステートメントはご存知でしょうか．たぶん，想像されているのは， $F(t)=f(x+th,y+tk)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ という t に関する一変数関数の平均値の定理なのです．ですから，あえて定理としては挙げていません．講義の最後くらい（多変数関数の極値問題）でこのケースを扱います．
- ロピタルでミスした奴いるよー誰だよー．自分です．ネタ提供になったようで光栄です．以後注意します（笑）　**山田のコメント：** Thanks です．
- 2 月 11 日は，運動をするといいことがあるかも？　**山田のコメント：** 何の運動?
- 後期もよろしく御願いします．　**山田のコメント：** こちらこそ．

質問と回答

質問： P2 の定理 1.1 について $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(F(x)\pm G(x)\bigr)=\alpha\pm\beta$ が成り立つことを用いてよいのなら，$\displaystyle\lim_{x\to a}=\bigl(f(x)-f(a)\bigr)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}f(a)=f(a)-f(a)=0$ というようには書けないのでしょうか.

お答え： **書けません**．$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ となるのはなぜ？この等式は f が a で連続であることの定義そのものです．定理 1.1 の結論は f が a で連続であるということですから，この推論では「結論を使って結論を示している」ウロボロスの蛇状態です．

質問： 講義ノート 1.1 によれば，閉区間の端点における連続性は片側極限について調べることで言えるそうですが，それならば端点における微分可能性も同様に片側極限を用いて定義されますか？また，その場合，注意 1.8 の内容は開区間を閉区間と読み替えても問題ありませんか？　**お答え：**そうです．問題ありません．

質問： 平均値の定理の使い所がイマイチ分かりません．平均値の定理を使う時，$f(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ のはんいで連続で微分可能であることを確認して，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ $(a<c<b)$ という公式を使いますがなぜ等号が消えているのですか?

お答え： 前期に “イマイチわかりません” という質問には “どこまではわかっているか” と返したので，後期もそうします．前半の「使い所」が「使用される場所」という意味なら講義で紹介した (1) 関数の近似 (2) 微分して 0 なら定数 (3) 導関数が正なら単調増加，と第 2 回のテイラーの定理/ロピタルの定理の証明．後半は，結論が $a\leqq c\leqq b$ ではなく $a<c<b$ であるのはなぜか，という質問でしょうか．この c は a, b と等しくないようにとれる，ということです．第 2 回で証明の際にコメントします．

質問： 平均値の定理はどうして平均値の定理という名前になったのですか?

お答え： 区間 $[a,b]$ での関数の平均変化率（高等学校の教科書にある言葉）に関わる定理だからです．

質問： 高校では（多分ですが）ほとんどの人が $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c)$ $(a<c<a+h)$ の形で平均値の定理を学んだと思います．ここで $c=a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ と表示する方法の利点は何でしょうか．　**お答え：**$h<0$ の場合も通用する（と講義で説明した)．

質問： 平均値の定理は多変数関数にはそのまま適用できませんよね?

お答え： できません．実際 “$a < c < b$” の意味が不明．多変数関数を扱う文脈で平均値の定理を用いるときは，$F(t) := f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ という一変数関数（この形は，前期に “旅” という文脈で出た）に対して適用するのが普通です．

質問： 平均値の定理で $\sqrt{10}$ の近似値を出しましたが，より厳密な値を出すにはどのようにしたらよいでしょうか．定理 1.4 の方が系 1.5 より範囲を狭められそうな気がします．

お答え： 前半：それを次回やる，といった．後半：系 1.5 は定理 1.4 と本質的に同じものなので，同じ結果しかでません．

質問： $\sqrt{10} = 3 + \sqrt{10} - 3 = 3 + \frac{1}{\sqrt{10}+3}$ という式と，講義中の $3.125 < \sqrt{10} < 3.17$ という情報により，$3.162 < 3 + \frac{1}{3.17+3} < 3 + \frac{1}{3.125+3} < 3.164$ とわかりました．もう一度同様の計算をすると，$3.16223 < 3 + \sqrt{1}3.164 + 3 < \sqrt{10} < 3 + \frac{1}{3.162+3} < 3.16229$ となり，精度を増やせそうな気がします．この方法とこれから紹介される方法では，何倍くらい効率がいい（同じ桁数を求めるのにより少ない計算量ですむ）でしょうか．

お答え： きちんと評価したことはないです．ご質問の計算は，漸化式 $x_0 = 3,\ x_{n+1} = 3 + \frac{1}{3+x_n}$ で定まる数列 $\{x_n\}$ が $\sqrt{10}$ に収束することによる．このとき $|x_n - \sqrt{10}| \leqq 10^{-n}$ はすぐにわかる．次回のテイラーの定理でも誤差を評価できるので比べてみよ．

質問： $\sqrt{10}$ の証明方法に $\sqrt{10} = 3 + \delta \to 10 \doteqdot 3 + 6\delta \to \delta = \frac{1}{6}$ とありましたが，これを帰納的に $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} + \delta_2$ で $\delta_2 \doteqdot 0$ とみなして $\sqrt{10}$ の小数点の値を求めようとしたらどんぐらい正確になりますか?

お答え： きくよりやってみよ．3 ステップくらいまではやってごらん．ところで “$\sqrt{10}$ の証明” って何ですか? “小数点の値” って何ですか? 書き言葉では普通 “どんぐらい” とは書きません．

質問： ずっとあやふやのままにしていたのですが，関数 $f(x)$ が $f'(x) \geqq 0$ のときも単調増加といいますか．そういわないのなら，このことに呼び方はありますか．

お答え： **定義:** 関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が**広義単調増加**であるとは，$x_1 < x_2$ をみたす任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して $\underline{f(x_1) \leqq f(x_2)}$ が成り立つこと．**定理：**区間 I で定義された微分可能な関数 f が I 上で $f'(x) \geqq 0$ をみたすなら f は広義単調増加．

質問： 定理 1.11 についてですが，「f が (a, b) で微分可能で，(a, b) で $f'(x) \geqq 0$ ならば f は単調増加」とするのは誤りですか?

お答え： **誤りです．**反例：$f(x) = \begin{cases} -x^2 & (-1 \leqq x < 0) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \\ (x-1)^2 & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$ とすると $f'(x) = \begin{cases} -2x & (-1 \leqq x < 0) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 2(x-1) & (1 \leqq x \leqq 2). \end{cases}$

質問： 関数の増減について，双曲線などは例外とおっしゃっていましたが，そのような関数は他にもあるのでしょうか．

お答え： 双曲線なんて言っていません．$f(x) = -1/x$ は $(x \neq 0)$ は $f'(x) > 0$ だが単調増加ではない．類似の例はすぐ思いつくはず：$g(x) = 1/x^3$．前期に「関数と関数のグラフを混同するな，区別せよ」とくどく言ったはずですが，忘れました?

質問： $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5^x - 3^x}{x^2}$ でロピタルの定理を 2 回使って求めるのは何故間違いなのですか?

お答え： ロピタルの定理の仮定を思い出しましょう．極限をとる関数の分母と分子を 1 回微分してできる $\frac{(\log 5)5^x - (\log 3)3^x}{2x}$ は $x \to +0$ で不定形ではないので，ロピタルの定理の仮定をみたしていません．

質問： $\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}$ (原文ママ：分子は $\partial^2 f$?) は $\neq$ となる変態が存在するけれども，成り立つと考えてよいとのことでしたが，$f'(c) > 0 \Rightarrow c$ を含む区間で f は単調増加は，例 1.3 という変態が存在するので一般に成り立たないとありました．変態の例が存在するのに，前者は無視して後者は無視できないのはなぜでしょうか．

お答え： 本当はどちらも無視できない．前者は f が C^2-級なら正しい，後者は f が C^1-級なら正しい．応用上よく現れる関数は C^∞-級だから気にしなくて良い．後期は少々 “理屈” 面を強化したいので，“$f'(a) > 0$ なら増加” は本当はうそ，と述べたわけです．

質問： 板書での次回予告について (略) ○で囲った部分には一体何と書いたんですか? 自分には Hospital としか. . .

お答え： l'Hospital．講義ノート 14 ページ脚注 8 をご覧ください．

質問： 夏休みの間に全て忘れました．微分って何ですか． **お答え：**そんなこともあろうかと，講義ノートの最初は復習です．

質問： 授業内容を見る限り，後期は前期でやったことの補足みたいにみえるのですが，前期でやった微分積分で力学，電磁気学にどのくらい通用するのでしょうか．

お答え： 前半と後半の関係がわかりません．前半：テイラーの定理，極値問題，級数などは前期に扱っていないはず．前期の補足であると思う理由は何？後半：力学や電磁気学は勉強しましたね．それならわかるはずだと思います．

質問： $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能に f において (a, b) で $f'(x) = 0$ なら f は定数関数とありましたが，$[a, b]$ において f は連続かつ微分可能で $f'(x) = 0$ $a < x < b$ という f がある場合，f は t の式一つだけで表すことは不可ですか?

お答え： ご質問の意味がわかりません．突然あらわれた t は何を表していますか?

質問： 問題 1-4 の工太郎君は光太郎君と何か関係がありますか． **お答え：**いいえ．東工大のマスコットのつばめ．ゴキブリではない．

質問： 昨年，板書を英語で行い批判があったとおっしゃっていたにもかかわらず，今年も英語で板書するのはなぜですか．

お答え： 皆さんに慣れてほしいから．批判があったのではなく評判が悪かった．

質問： $m[a, b]$ の m ってなんですか． **お答え：**文脈を教えて下さい． **質問：**教室の違いって大きいですよね． **お答え：**ですよね．

質問： 私は大事な部分をメモするとき，前期は配布資料に書いていましたが，後期はノートにとるか迷っています．前者は長い数式を書かなくて済み，後者は自由にスペースをとれるという利点はありますが，先生個人としてはどちらがよいと思いますか．

お答え： むしろあなた個人の問題だと思います．講義資料を配布しているのは “正確な定理の文章”，“長い式” をノートに写す手間を省くため，という意味もあります．ノートを書いていて “重要な口述” を聞き逃すことは避けたいですよね．

質問： There exists a number C such that $a < c < b$ となっていたが，C と c の区別はきちんとしたほうがよい．/ 英語で書くならばきちんとピリオドをつけるべきではないだろうか．特に文だと思われる箇所の全てにピリオドが欠落しているのが気になる．

お答え： 前半：了解．山田は “大文字の C” は “爪” をつけています．(前期からそうしていたけど気づいてました?)．後半：Thanks．実際，日本語の文脈でもきちんと句読点をつけるべきですよね．