2013 年 10 月 22 日 (2013 年 10 月 29 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 微分積分学第二 B 講義資料 3

## 前回までの訂正

- テイラーの定理の適用例で紹介した $\sqrt{10}$ の近似式：$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\times 27} + \frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{9+\theta}}$ の 27 が抜けていました．
- Cauchy の平均値の定理の応用として l'Hôpital's rule を示すあたりで，「$f$, $g$ は $(a, a+h)$ で微分可能，$[a, a+h)$ で連続だから Cauchy の平均値の定理より」と書いたようです．「$f$, $g$ は $(a, a+h)$ で微分可能，$[a, a+h]$ で連続だから Cauchy の平均値の定理より」です．
- 講義ノート 10 ページ，下から 5 行目：$c_1$, $c_2$ の一方が ⇒ $c_1$, $c_2$ の少なくとも一方が
- 講義ノート 12 ページ，下から 4 行目：$\dfrac{1}{k!}f^{(n)}(a)h^k \Rightarrow \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n$
- 講義ノート 12 ページ，定理 2.9：脚注追加：式 (2.1) の総和記号の $k = 0$ の項において $h^0$ は $h = 0$ のときも 1 であると約束しておく．
- 講義ノート 13 ページ，3 行目：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a+h)}{k!}h^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$
- 講義ノート 19 ページ，(3.3) 式：$g(x) + o\bigl(g(x)\bigr) \Rightarrow g(x) + o\bigl(h(x)\bigr)$.
- 講義ノート 21 ページ末尾：定理 2.9 の形の剰余項を用いると，この議論はうまくいかない．
  ⇒ 定理 2.9 の形の剰余項を用いても同様の結論が得られる．
- 講義ノート 22 ページ 1 行目：式 (3.4) ⇒ 式 (3.5)

## 授業に関する御意見

- 今やっている数学をするのに必要な定義って何なのでしょうか?　**山田のコメント：** 一言は答えられません．用語にはみな（一応）定義があると思うのですが．「定義」という語の意味は大丈夫ですね．
- 英語で小さくモニョモニョと書かれても見辛いのでやめて下さい．元のようにう日本語で定理の名前を記述して下さい．
  **山田のコメント：** 両方書くっていうことでいかがでしょう．たぶん，皆さん先にいくにしたがって，術語を日本語で書かなくなってくるわけでどこかでモニョモニョになれる必要があると思うわけです．政界・産業界挙げてグローバル化 w を大学に要求していることですし www
- 宗教怖いです　**山田のコメント：** そうですか. . .
- ~~なんだか台風にあまりときめかなくなった．童心に帰りたい~~不謹慎　**山田のコメント：** え. . . 私もあまりときめきませんね．熊本にいたときは（以下自粛）
- ハイテンションから（時計が）ご臨終. . .　**山田のコメント：** 私はまだです．

## 質問と回答

| $a$ | $h$ | 精度 |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 0 ケタ |
| 9 | 1 | 3 ケタ |
| 9.9225 | 0.0775 | 6 ケタ |

**質問：** テイラーの定理で $n = 1$ として $\sqrt{10}$ の近似値を求めたところ，$a$ と $h$ のとり方によって精度がかわりました ($\sqrt{10}$ を既知として計算．) 一般に $n$ の値が同じでも $|h|$ の値が小さい方が精度は良くなりますか? (精度は一致した小数点以下桁数)

**お答え：** テイラーの定理の剰余項の値は $a$, $h$, $n$ に依存するので色々ですが，$h$ の依存のしかたは，ほぼ $h^{n+1}$ くらい（第 3 回）なので，$h$ が小さいほど精度は良い．ご質問では $a$ も変えるので，一概には言えませんが．

**質問：** 前回，今回において $[a, b]$ で連続かつ $(a, b)$ で微分可能という仮定が多く使われていますが，$f'(a)$, $f'(b)$ は存在しない場合でも平均値の定理などは必ず成立するのですか．

**お答え：** 成立する（というのが定理のステートメント）．証明で，最大値・最小値の存在を使うが，これは関数の連続性のみが仮定だから，Ok. たとえば $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ なども想定している（と講義で述べた）．

**質問：** 平均値の定理やテイラーの定理を証明するのに用いた $F(x)$ を体系的に求める方法はあるのでしょうか．

**お答え：** やはり try and error では? 平均値の定理の証明の場合は，$F(x)$ の意味を説明しましたね．

**質問：** 定理 2.6 のコーシーの平均値の定理に $g(x) = x$ を代入すると，定理 1.4 の平均値の定理になりますが，この平均値の定理は定理 2.6 の特別の場合と考えていいでしょうか．どちらが先に発見されたのでしょう．

**お答え：** 定理 1.4 (Lagrange の平均値の定理) は Cauchy の平均値の定理の特別な場合（と口頭で説明した）．たぶん Lagrange がもとの形．

**質問：** 講義ノート p10 補題 2.4 の証明のところで $f(c+h)-f(c) \leqq 0$ なので（中略）“$h$ を 0 に近づけた時の極限値 $f'(c)$ は 0 でなければならない．” となるのはなぜですか．

**お答え：** (1) $x>a$ をみたす $x$ に対して $F(x) \geqq 0$ が成り立ち，$A := \lim_{x\to a+0} F(x)$ が存在するならば，$A \geqq 0$. (2) $x<a$ なる $x$ に対して $F(x) \leqq 0$ で，$B := \lim_{x\to a-0} F(x)$ が存在するなら $B \leqq 0$. (3) $C := \lim_{x\to a} F(x)$ が存在するための必要十分条件は $\lim_{x\to a-0} F(x)$, $\lim_{x\to a+0} F(x)$ が存在し，その値が一致することで，その共通する値が $C$ となる．関数 $F(x) = \bigl(f(c+x)-f(c)\bigr)/x$, $a=0$ にこの事実を適用せよ．

**質問：** p 13 の $F(0)=F(1)=f(a+h)$ をみたしている．これにロルの定理を適用とありあすが，この意味がわからないです．証明が少し投げやりな感じがします．

**お答え：** それを講義で説明した．「$F$ は $[0,1]$ で連続，$(0,1)$ で微分可能．したがって Rolle の定理から $F'(\theta)=0$, $0<\theta<1$ をみたす $\theta$ が存在する．この $\theta$ に対して $F'(\theta)=0$ という式を書くと結論が得られる」．ロルの定理を適用する状況はきちんと書かれているので，後は読者がフォローできる，という数学の本ではごく普通の書き方．

**質問：** ロピタルの定理について全く知らなかったのですが，授業で言及した仮定と結論を覚えれば大丈夫でしょうか?

**お答え：** それほど重要な定理ではないと思うので，無理に覚えなくてもよい．高校や予備校で不適切に教わっている人がいるようなので，注意という意味で説明した．講義ノートでは演習問題になっていて本文にはありません．

**質問：** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{x^2}$ の解き方について，いろいろこの定義がつかえるかーとか話していたけれど，普通に

$$\begin{aligned}(5^x-3^x) &= (5-3)(5^{x-1}+3\cdot 5x^{x-2}+9\cdot 5^{x-3}+\cdots+3^{x-1}\cdot 5+3^x)\\ &= 2(5^{x-1}+3\cdot 5x^{x-2}+9\cdot 5^{x-3}+\cdots+3^{x-1}\cdot 5+3^x) \overset{x\to 0}{\to} 0 \text{ 以上の定数}\end{aligned}$$

で $x^2$ は 0 に収束するので $+\infty$ にとぶではいけないのでしょうか．

**お答え：** **いけません．** (0) この文脈では定義という語がでてくるのは変．意味分かってます? (1) 分子が 0 以上であったとしても 0 だと結論はでてこない．(2) もとの問題は $x\to +0$ という右極限．このアイディアだと $x\to 0$ で $+\infty$ と結論され，問題よりも強いことが言えている．実際には左極限 $x\to -0$ は $-\infty$. (3) 最初の因数分解の 2 番目の括弧の中はいくつの項からなるのだろう．$x$ は一般に整数ではない ($x\to +0$) のでたとえば $x=0.1$ のときは? ちなみに $x$ が正の整数でも最後の項が間違い: $3^{x-1}$. “普通に” といって全く普通でないことをやっている．

**質問：** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{x^2}$ で 2 回ロピタルが使えないことはわかりますが，1 回は使えるんですよね? だとしたら 1 回のロピタルで答は $+\infty$ と出ると思うのですが，それでいいんでしょうか．なぜ 2 回目という話はでてきたんでしょうか．

**お答え：** $\dfrac{(\log 5)5^x-(\log 3)3^x}{2x}$ の分母と分子を微分してしまう人が結構いるから．講義ノートの問題にあるロピタルの定理は，この問題の場合をカバーしていません．あなたが使ったロピタルの定理のステートメントをきちんと述べられますか? (適切なロピタルの定理— 講義ノートにあるやつじゃないバージョンを使えば議論自体は正しい．)

**質問：** 前期第 9 回（「前回まで」には前期も含まれますか?: 山田注 はい）に区間 $[x_{j-1},x_j]$ での $f$ の “最大値” と “最小値” を用いた積分の定義がありました．ところで Twitter で「フーリエ変換」を検索していると $F(\omega)=\int_\infty^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt$ という式がありました．この $j$ を四元数 (AOJ 0241 参照) と考えると，オイラーの公式の応用で $e^{-j\omega x}$ は三角関数に分解できそうですが，四元数の「大小関係」が決まらないと max と min も決まらず，この定義だと積分ができない気がします．四元数は大小関係がきまるのか，それとも積分の別の定義を使用するのでしょうか? 定義の「最大値」「最小値」に引用符がついているのが少し気になりますが．

**お答え：** (1)「最大値」「最小値」に引用符がついているのは，区間 $[x_{j-1},x_j]$ で被積分関数が最大値・最小値をとらない可能性を考えているから．本当は “上限”, “下限” が正しいが，これは後期で扱うと決めたので，とりあえず引用符付きで最大・最小と述べた．連続関数のみを扱うのであればこれで問題はない．(2) 多分この文脈では $j=\sqrt{-1}$. 多くの文脈では $\sqrt{-1}$ のことを $i$ と書くが $j$ と書く場合もしばしばある．このとき $e^{-j\omega t}=\cos\omega t - j\sin\omega t$. (3) 数直線上の区間で定義された複素数値関数の積分は，その実部と虚部の積分を用いて定義する：$f(t)=\alpha(t)+i\beta(t)$ ($\alpha$, $\beta$ は実数値関数) に対して $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \alpha(t)\,dt + i\int_a^b \beta(t)\,dt$. 複素数の大小は考えなくて良い．

**質問：** 「定義域を有理数に限っても連続」とはどういうことですか? **お答え：**有理数の範囲で $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

**質問：** 平均値の定理 → ロルの定理 → 最大値最小値の存在 → と証明を帰着させていますが，どこでけりがつきますか．

**お答え：** 最大値最小値の存在くらい．これを「実数の連続性」に帰着させるととりあえず「けりをつけた」ことになる．

**質問：** 配布プリントを数箇所に分けて置いていただけるとありがたいです．

**お答え：** 質問ではなく意見の項に書いてくださいね．最初に来た人が適切に扱ってくれるとありがたいです．クラスで工夫しましょう．もっと効率のよい方法があるかもしれません（山田は手をだしません）．