

微分積分学第二 B 講義資料 4

前回までの訂正

- 黒板でやった極限の問題 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - 3x - x^3}{6 \sinh x - 6x - x^3}$ の途中から分母と分子が逆になっていたようです。正解は 8。
- 板書した多項式のテイラー展開の例で $f(2+h) = 28 + 75h + \frac{122}{2}h^2 + \frac{132}{6}h^3 + \frac{72}{24}h^4$ の h^4 が抜けていました。
- Taylor の定理を黒板に書いた際に exists の綴りが誤っていたようです。
- 講義ノート 9 ページ, 補題 2.4 の上に追加: 区間 I の点 c が I の内点であるとは, c 含む開区間で I に含まれるものが存在することをいう。たとえば閉区間 $I = [a, b]$ に対して $c \in (a, b)$ は I の内点であるが, a, b は I の内点ではない。
- 講義ノート 17 ページ, 脚注 1: reminder \Rightarrow remainder.
- 講義ノート 18 ページ, 12 行目: テイラーの定理 3.1) の括弧が余計。
- 講義ノート 19 ページ, 12 行目: ランダウの (小文字の o 記号) \Rightarrow ランダウの (小文字の) o 記号 [括弧の位置]
- 講義ノート 19 ページ, 15 行目: 「とくに...」以下の 6 行を「ランダウの...」のあとに移動。
- 講義ノート 27 ページ, 定義 4.4 の 1 行目: C^∞ 級 $\Rightarrow C^\infty$ -級
- 講義ノート 27 ページ, 脚注 2: Maclaurin 展開 \Rightarrow the Maclaurin expansion
- 講義ノート 32 ページ, 補題 4.6 の 1 行目: $\{x \in I \mid a \notin I\} \Rightarrow \{x \in I \mid x \neq a\}$
- 講義ノート 32 ページ, 問題 4 の上の行: 第 5 回 \Rightarrow 第 6 回
- 講義資料 3, 下から 15 行目: 部会 \Rightarrow 分解 ● 講義資料 3, 下から 14 行目: で k ない \Rightarrow できない
- 次のようなご指摘をいただきました (原文のまま載せます)

rational number の語源をたどると英語ではなくラテン語の 'ratio' に行き着く。ratio (英) と違い 'ratio' (羅) は英語の reason とほぼ同様の意味で使われていた (更に言えば 'ration' の語源は reor という動詞で to reckon, think ... etc) また ration の直接の語源はラテン語の rationalis である。したがって, rational number の語源の話に ratio (英) が出てくるのはおかしい。それから rational number は 'ratio' (羅) が語源であるから有理数と訳すのも必ずしも間違えとはいえない。reason の語源もまた 'ratio' (羅) である。

山田注: ありがとうございます。勉強になりました。手元の辞書 (Collins Gem) で "ratio" を調べると, 最初の語義が account, calculation です。reasoning は 3 番目の語義として出てきます。なにか "数えること", "計算すること" との関係があるのでしょうか。

授業に関する御意見

- お大事に。山田のコメント: ありがとうございます。ご心配かけて申し訳ありません。
- 前期よりも板書における計算ミスが多く見受けられます。前期はほぼミスがなく神がかった先生と比較しているから目立つのか? 山田のコメント: 前期もよく間違ってたような気がしますが... 疲れてるのは確かですね。ごめんなさい。
- (質問の内容について) 以前の授業内容ですみません。山田のコメント: 結構です。
- 僕は比喩推しです。山田のコメント: ねえ。
- 訳語って難立たいですよ。予備校の講師が「三角不等式」私は試験の全日に「微分」に怒りを覚えました。山田のコメント: 三角不等式は直訳では? 微分は「かすかにわかる」。
- 問題 3-2 を解いて, 検算のためにロビタルを使ったら, 同じことをやることに気づき感激しました。山田のコメント: ですよ。本当に同じことなんです。
- 個人的には「誤差のオーダーが ϵ^3 をこえる」というと「ワシヤルフロイド法みたいに値がどんどん大きくなって大変そう」というイメージが... 関係ないですけどね。山田のコメント: Warshall-Floyd 法ね。この場合, グラフのサイズ n に対して, 計算量が $O(n^3)$ ということですが, これは $n \rightarrow \infty$ のときに n^3 と同じ速さ以下で無限大に発散することを表しており, $O(n^3)$ ($n \rightarrow \infty$) と書くのが正式。今回扱ったのは $o(h^3)$ ($h \rightarrow 0$) なので, 状況は違いますが, 考え方はほぼ同じです。
- 快眠したいです。先生はできてますか? 山田のコメント: いいえ。● 先生はテックちゃんグッズ持ってますか? 山田のコメント: もってません。残念。
- 授業はいつそのことみんな英語でも良いと思います。(少なくとも板書は, 日本語と英語が混ざると読み辛い...) 山田のコメント: そう... ですよ。
- 英語なれませんか。山田のコメント: なれて-

質問と回答

質問： テイラー展開(山田注:テイラーの定理のこと?)で得られる剰余項(原文ママ)の誤差はどの程度のものでしょうか?

お答え： 剰余項ですね。剰余項の誤差とはなんでしょう。定理のステートメントは等式ですから、ぴったり等しいというのを述べています。すなわち剰余項は誤差を含まない形で書かれています。

質問： 「 h が小さいとき」というのは具体的に H がどのような値のときですか?

お答え： 具体的な関数によって違います。これをきちんと述べるのに必要なのが第 5 回以降に扱う、いわゆる ε - δ 論法。

質問： 剰余項は多項式の関数以外の関数の場合、 h : 小, n : 大でも $h \rightarrow 0$ で 0 に収束しないことはありますか。またあるときは例として何がありますか? お答え： ない, $R_{n+1}(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) となるのが定理 3.1 の結論。

質問： 平均値の定理で、条件を満たす c が少なくとも 1 つ存在するとあるが、逆に $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ($a < c < b$) を満たす c が 1 つでも存在すれば、开区間 (a, b) は (原文ママ: “で” ですか?) 微分可能と言っているのでしょうか。

お答え： 簡単に反例がつけれます。例えば、微分可能な関数を用意しておいて、条件を満たす c をみつめて、それ以外の点で値をいじってやれば連続でない関数をつくれる。例えば $[-1, 1]$ で $f(x) = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{2}$ のとき), $f(\frac{1}{2}) = 3$ と定めればこれは反例ですよ。

質問： 演習で、次の $[0, 1]$ 区間で定義された関数が与えられました。 $f(x) = x$ ($x \in [0, 1)$), $f(x) = 0$ ($x = 1$)。この関数において $x = 0$ or $x = 1$ で $f(x)$ は最大値 0 をとると (授業プリント p 9, 定理 2.1 から) 考えましたが、同ページの補題 2.4 において $c = 0$ においてこの関数に適用すると、 c で最小値とるにもかかわらず、 $f'(c) = 1 \neq 0$ と間違った結論が導かれてしまいました。これは何故でしょうか。

お答え： まず、定理 2.1 から最小値をとる、というわけではありません。実際、 f は $[0, 1]$ で連続ではないので、定理の仮定を満たしていません。さて、 $c = 0$ は区間 $[0, 1]$ の内点ではありません (この定義を入れ忘れていました。申し訳ありません。この資料の「訂正」の項参照。なお、証明の中で「内点である」ことを使っているの、実は定義はわかるようにはなっている。)

質問： 最大値最小値定理の証明を後にまわしたのは難しいからですか? 考えてみたけど、よく考えないと当たり前に思ってしまう定理の証明は難しく分かりませんでした。

お答え： 「実数の連続性」に関わるので、それを説明したあとにやります。

質問： 授業で $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R(x)$ の $R(x)$ が $x \rightarrow 0$ で $4x^5$ よりはやく 0 に収束するとおっしゃっていましたが、これは $R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta h)$ の式構造からいえると考えていいのでしょうか。それとも定理 3.1 の $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^5} = 0$ から判断したものなのでしょうか?

お答え： もちろん定理 3.1 の結論から来ているのですが、定理の証明は $R_{n+1}(h)$ の形 (式構造っていの?) から来ている。したがって、答は「どちらでもある」。

質問： テイラーの定理は $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ なら $f(x)$ はテイラー展開可能という事ですよ。

お答え： そのことをテイラーの定理というのではないと思いますが。

質問： テイラーの定理の剰余項のふるまいについて、 n が大きいときは、“ $R_{n+1}(h)$ ” は h の値に依存せず 0 に近づきますか。 お答え： 一般にはそうはなりません。第 4 回はそこを扱います。

質問： テイラー級数の方がテイラーの定理より見たこともあり分かりやすいような気がするのですが、テイラーのやった順番としては、定理 \rightarrow 級数なのでしょうか。

お答え： よく知りません。多分、テイラー級数を考えたのでは、と思いますが、一次資料を調べたことはないの。ところで、テイラー級数のほうが分かりやすいですか? 無限和より有限和の方がわかりやすいと思いませんか。

質問： なるほどテイラーの定理を使うからテイラー展開なんですね。ではマクローリン展開はどうして「マクローリン」展開なんですか?

お答え： たぶん、マクローリンさんが考えていたからなんではないでしょうか (こういう答を期待していたのだろうか?)

質問： テイラーの定理とテイラー展開は違うものですか? お答え： この講義では区別します。第 4 回で説明します。

質問： テイラーの定理はどんな無理数の近似値を出すのにも有効なのですか?

お答え： 「無理数」としてどういうものを想像していますか? ある種の関数の特別な値の近似値ということでしたら、さまざまなケースで有効。

質問： 講義ノート p. 21 の定理 3.8 の証明がわかりません。 $f(x) - f(a)$ を変形する部分まではわかりましたが $R_{n+1}(h)$ とどう関係してくるのでしょうか。

お答え： 定理の結論は、最後の項を $R_{n+1}(h)$ とおくと、それが、ステートメントにある積分の式で表せるということ。証明の最後にそれが示されています ($x = a + h$ とせよ)。

質問： ランダウの記号について、なぜ $f(x) = o(g(x))$ のように関数と関数でないものを等号で結ぶことが許されているのか。誤解を招かないように何か別の記号を用いることはできないのか。

お答え： 授業でも一言述べましたが、これは良くない記号です。意味をきちんと理解して使う文には、慣れれば便利なので使われますが、間違った使い方をする危険はつきまといまいます。ですから、ここでは積極的にはこの記号は使いません。誤解がないように書くには $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ と定義通りに書くのがよいと思います。

質問： オーダーは「次数」と訳されますが、 e^x の次数を実数をつかって書くとしたらどうなるのでしょうか？ $x^2 \rightarrow \log_x x^2 = 2$, $e^x = \log_x e^x$ となって x の関数となるということではよいのでしょうか。

お答え： 後半でおっしゃっていることの意味がわかりません。この講義で扱ったのは“0 に近づくオーダー”です。たとえば x^2 は $x \rightarrow 0$ で 2 次のオーダーで 0 に近づく。 $\sin x$ は $x \rightarrow 0$ で x と同じオーダーで 0 に近づく。 $e^x - 1$ は $x \rightarrow 0$ で 1 次のオーダーで 0 に近づく。

質問： e が無理数であることの証明の中で $n \geq 2$ としたのはなぜですか。

お答え： 不等式 $1 < e^\theta < 3$ と $\frac{1}{n+1}e^\theta$ が整数であることから矛盾を導くには、 $n = 1$ ではまずい。

質問： 授業中に問題 3-6 と同じ方法で π が無理数であるとは証明できないと言っていましたが、どうしてですか。

お答え： 円周率の級数表示をしてみると、 e のときのような階乗のトリックが使えない。

質問： コーシーの平均値の定理が成り立つことは分かりましたが、これをもちいてどのようなことを示せるのかがわかりません。教えてください。 お答え：講義ノート 14 ページ、問題 2-4。

質問： 授業の中で調和級数がでてきましたが、数学で“調和”にはどんな意味があるんですか。

お答え： 文脈依存ですが、 $\sum \frac{1}{n}$ が調和級数とよばれるのはピタゴラスによる気がします。彼は、長さ 1 の弦、 $1/2$ の弦、 $1/3$ の弦... を弾くとよくとける(調和する)音が鳴るということを確認しているようです。(倍音、つてやつですね)。調和関数の“調和”との関係はよく知りません。ごめんなさい。いずれにせよ harmonic の訳語です。

質問： 講義ノート問題 2-10 (地球とゴムひもの問題) $\sqrt{2R+1}$ は $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 2R$, $h = 1$ から近似値を求められましたが、 $\tan^{-1} \frac{\sqrt{2R+1}}{R}$ は $f(x)$, a , h をどのように設定するのでしょうか。

お答え： $f(x) = \tan^{-1} x$, $a = 0$, $h = \sqrt{2R+1}/R$ とすると最初の項がキャンセルすることがわかります。

質問： x 進数の例えについて、係数が x を超えるとか x は未知数とかがあるので、なにか違う気がしております。

お答え： もちろん例えですから、完全に同じというわけではないです。各桁の数字が実数全体を動くわけですよ。でも、似ている性質もたくさんあるのだから「たとえ話」としてはよくできるとは思いますが。

質問： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$ を $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + R_{n+1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ($n \rightarrow \infty$) から示していました。が、直接 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ から出せないのでしょうか。

お答え： この等式を示す方法はいくつかあって、この授業でも紹介します。どういう方法を「直接」と思えるかによりませんが、あなたの思う直接ではないと思います。もし、良い方法を見つけたら教えてください。

質問： やっぱり数字は全ケタわからないとイヤです。 お答え：測定を全否定したようなお言葉ですね。で、質問は？

質問： 本当に 562 億だけ聞いて死んだら後悔がないはずはない。 お答え：そりゃそうですね。

質問： 先生が 34 歳なら F 歳差ですね。 お答え：結構、年齢とってるのね。

一週間遅れの質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です。なお、得点は加算されません。

質問： ロルの定理を使っただけの平均値の定理などの証明の仕方がよくわかりません。そもそもロルの定理は $a \neq b$, $f(a) = f(b)$ という a, b があることが前提ですが、平均値の定理では、 $f(a) = f(b)$ となるような a, b が存在しない場合もありますし、先生がロルの定理と平均値の定理が似ているといった理由がよくわかりません。

お答え：「ロルの定理は平均値の定理の特別な場合である」この意味は分かりますか。ロルの定理を用いた平均値の定理の証明はきちんと読みましたか？ もちろん、示したいのは一般に $f(a) = f(b)$ とは限らない関数 f に対する定理ですが、証明にあたってロルの定理を適用するのは f ではなく $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ という関数です。この関数は (f がどんな関数であれ) $F(a) = F(b) = 0$ を満たしているのだから、ロルの定理が使えます。「そもそも」なんて大上段に振りかぶらず、自然体で考えましょう。