2013 年 11 月 5 日 (2013 年 12 月 03 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 5

お知らせ【授業日程変更】

申し訳ありませんが都合により **12 月 17 日（火曜日）は休講** とさせていただきます．出席義務を伴う補講は用意しませんが，試験・補講期間の 2 月 4 日を試験前の「質問の時間」とします．

前回までの訂正

- 黒板に $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^3 + \dots$ と書いたようです．もちろん $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots$ です．
- 等比級数の和のくだりで黒板に $\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}}{1+x}$ と書いたようです．最後の項は $\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$.
- 講義資料 4, 1 ページ：
「講義ノート 32 ページ，補題 4.6 の 1 行目」⇒ 「講義ノート 32 ページ，補題 4.16 の 1 行目」
- 講義ノート 28 ページ，下から 8 行目：$e^{-1/h}h \Rightarrow \dfrac{e^{-1/h}}{h}$
- 講義ノート 29 ページ，下から 5 行目 ($\binom{\alpha}{0}$ の部分を追加; ご指摘ありがとうございます)：

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \Rightarrow \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k>0), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

- 講義ノート 29 ページ，一番最後：$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{16}$
- 講義ノート 31 ページ，下から 4 行目：最後の式の分母：$(N+1)(N-n) \Rightarrow (N+1)^{N-n}$
- 講義ノート 32 ページ，上から 10 行目：$\frac{1}{x}\,|p_N + \dots| \Rightarrow \frac{(N+1)!}{x}\,|p_N + \dots|$
- 講義ノート 33 ページ，下から 2,3 行目：

$$\begin{aligned}|x| &= |x+(y-x)| \leqq |x| + |y-x| = |x| + |x-y|,\\ |y| &= |y+(x-y)| \leqq |y| + |x-y|\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}|x| &= |y+(x-y)| \leqq |y| + |x-y| = |y| + |x-y|,\\ |y| &= |x+(y-x)| \leqq |x| + |x-y|\end{aligned}$$

授業に関する御意見

- 英語のつづりをもう少し大きく書いて欲しいです． **山田のコメント：** 気をつけます．
- 「三角不等式」と，三角関数の不等式をそう言うことがあるみたいですよ． **山田のコメント：** あまり聞いたことがないですね．業界では非標準のような気がします．
- 今週から本気出す． **山田のコメント：** そーですかぁ？
- （山田注：誤りの指摘で）上のようなすごく細かい部分でも指摘して良いのですか？ **山田のコメント：** 良いです．助かります．「きちんと読んでいる」ことを示しているのですから，評価の対象です．
- テイラー展開楽しい! **山田のコメント：** よね．
- 先生おもろい! **山田のコメント：** そうですか？ ● 無限. . . ムゲン . . . 井口裕香. . . **山田のコメント：** ぐぐってしまったじゃないですか．
- “数のかぞえ方” について少しくわしく． **山田のコメント：** またこんど．一つだけ：線型代数で習う「次元定理」は「数の数え方」の定理ですね．
- お体お大事に． **山田のコメント：** ご心配かけます．

質問と回答

質問： $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ を両辺微分すると，$e^x = 1 + 1 + x + x^2 + \dots$ はなりたたないですよね. . . ?

お答え： 右辺の微分が間違っています．$(1)' = 0$, $(x)' = 1$, $\frac{x^2}{2!} = \frac{2x}{2!} = x$, $\frac{x^3}{3!} = \frac{3x^2}{3!} = \frac{x^2}{2!}$,. . . .

質問： 例 4.3 で $f(x) = \log(1+x)$ は $x < -1$, $1 < x$ ではテイラーの定理を何故適用できないのですか?

お答え： $x > 1$ でもテイラーの定理は適用できます．ただ $n \to \infty$ で剰余項が 0 に近づかないだけ．$x < -1$ のとき $x = 0$ の周りでテイラーの定理は適用できません．なぜなら f は -1, 0 を含む区間で C^∞-級ではないからです．

質問： $(1+x)^\alpha$ の展開で「α 正の整数でないとき $-1 < x < 1$」となるのはなぜですか．

お答え： それを「冪級数」の項でやる．たとえば $\alpha = -1$ のときは高校生のレヴェルですよね．

質問： C^∞-級関数 $f(x)$ が任意の自然数 n に対して $f^{(n)}(0) \neq 0$ であるとき，$f(0)$ を何次で近似しても余剰項（原文ママ：剰余項のことか）は残るのに，マクローリン展開では $f(0)$ の値を正確に表すことができるのですか?

お答え： $f(0)$ でなく $f(x)$ の値ですよね．剰余項 $R_{n+1}(x)$ が $n \to \infty$ で 0 にいくから，ということではだめ?

質問： テイラー展開を無限にして $\lim_{n\to\infty}\mathbb{R}(x)=0$ （原文ママ：$R_{n+1}(x)$ のことか?）となればどんな関数（解析関数以外）でも表せるのではないでしょうか.

お答え： どんな関数も冪級数で表されるか，ということでしょうか．$n\to\infty$ で $R_{n+1}(x)\to 0$ のが解析関数の定義．ですから，解析関数以外では，ご質問のような状況は起きません．

質問： テイラーの定理において $n\to\infty$ はどうなりますか． **お答え：**ということを今回の授業で丁寧に説明した．

質問： テイラーの定理は有明な関数に関しては覚えたほうがいいですか．

お答え： 「ありあけ」な関数はわかりませんが，有名な（これもわからない）関数，今回扱った関数については常識．

質問： ラーラの定理（テイラーの定理のことか）覚えた方がいいですかね? **お答え：**はい．

質問： $f(x)=$ (略．例 4.5) で Taylor の定理を $f(x)=R_{n+1}(x)$ となって 0 にならないと言いましたが $x\leqq 0$ のとき $f(x)=0$ なのになぜ 0 にならないのですか． **お答え：**いいそびれたかな？「$x>0$ のとき 0 にならない」です．

質問： 関数が解析的であることが具体的にどういう良さ?使い方? があるのでしょうか．これからおしえていただけるのですか? 今はだからどうした状態です． **お答え：**これからの文脈から見つけよ．今は「だからどうした」で結構．

質問： プリント 27P に書いてある定義 4.4 の解析的の言葉の説明がわかりにくいです．解析的という言葉はテイラー展開が可能という条件さえあれば解析的という事ですよね．なぜ，テイラー展開ができる → 解析的という言葉が出てくるのか知りたいです． **お答え：**前半：そうです．後半：複素関数の文脈から出てきた言葉と思います．ここでは単に「テイラー展開可能」の同義語と思っていただければ（文字数が少なくなる利点がある）よいです．

質問： 「C^ω-級」で ω を使う意味は何でしょうか．集合論等である自然数全体の集合を ω で表すのと関係あるのでしょうか． **お答え：**それほど厳密な意味ではなく，∞ より大きい微分可能性，という気持ちだと思います．

質問： Easy mode は極限の順序交換の証明の省略以外は何か意図したことがありますか?

お答え： 極限の順序交換の証明を省略したのではなく，極限の順序交換をする必要がない状況をつくった．Easy の理由は例 4.3 の計算をきちんとフォローして，比較してみればわかる．

質問： $\binom{\alpha}{k}$ で α, k が自然数のとき，$\binom{\alpha}{k}={}_\alpha\mathrm{C}_k$ となりますが，どちらの表記でも数学界では通用しますか．

お答え： 数学界が何をさすかよくわかりませんが，たぶん通用すると思います．

質問： ${}_n\mathrm{C}_k$ よりも $\binom{n}{k}$ の方が一般的とのことですが，${}_n\mathrm{P}_k$ についても他に一般的な記法はありますか．

お答え： $n^{\underline{k}}:=n(n-1)\dots(n-k+1)$ が ${}_n\mathrm{P}_k$ の別の表し方．$n^{(k)}$ と書く人もいて，「階乗関数」「階乗冪」などといいます．（差分や和分を考えるときは冪乗よりもこの方が扱いやすい．）この記号を用いれば $\binom{n}{k}=\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$．

質問： 二項係数の $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ について同じような形が他にも多くあるので，毎回定義しなければいけないのでしょうか．また，別の形で定義してはいけないのでしょうか．

お答え： ご質問の意味が分かりません．他にある「同じような形」とは具体的に何ですか? 「別の形で定義しては」とは具体的にどういうことですか？もし，この記号を使うときにことわりが必要か？というご質問であれば，文脈依存，誤解しそうなときは断れ，というだけです．断り方は「ただし $\binom{\alpha}{k}$ は二項係数を表す」だけでよい．

質問： 二項定理の $\binom{\alpha}{k}$ という表記は，二項係数を関数と見立てて，その関数を表している（つまり $f(x,y)$ でいう (x,y) だけを表記したもの）として扱っても問題ないでしょうか．

お答え： 何を言っているのかわかりません．関数と見立てて扱うのと見立てないで扱うのはどう違うのですか？

質問： コーシーの平均値の定理とロピタルの定理の関係がよくわかりません．

お答え： 問題 2-4．講義で説明したが「関係」は「ロピタルの定理の証明にコーシーの平均値の定理を使う」

質問： ランダウの記号と情報工学で使われているオーダーは同じ記号に見えますが，何か関連性はありますか．

お答え： 講義資料 4, 1 ページ，下から 3 つめのご意見に似たようなことがあります．

質問： ベクトルとは大学でどのくらい広い意味で使われるのですか．

お答え： 大学で，とはどういう意味でしょう．文脈依存です．線型代数の授業ではどういう意味で使っていますか?

質問： 無限級数の和はどのように計算したのでしょうか． **お答え：**たくさんの無限級数があるので，一言では言えません．具体的な和の計算は「問題ごとのテクニックを発明することが多い」という話は講義でやりましたね．

質問： 工学的な場面で，関数をテイラー展開するときに，一般的な適用のしかたか注意すべき点をざっくり教えてください． **お答え：**ざっくりとオーダーに注意せよ．

質問： テイラー展開とマクローリン展開はどちらが先に発明されたのですか．

お答え： たぶん，ステートメント自体は Newton あたりも知っていた．Taylor はそれをきちんとのべて微積分の基礎と位置づけた，Maclaurin も級数を用いて関数の性質を調べた（らしい）．18 世紀の話ですのでよく知りません．

質問： (a,b) で微分可能と書いてありましたが，なぜ $[a,b]$ ではないのでしょうか．

お答え： そういう場面がたくさんありましたがどこですか?